Série A, n° 776.
N° d'ordre :
1559.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. Louis CHAUMONT,
Agrégé Préparateur à l'École Normale supérieure.

1re THÈSE. — Recherches expérimentales sur le phénomène électro-optique de Kerr et sur les méthodes servant a l'étude de la lumière polarisée elliptiquement.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 juin 1914, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUTY, *Président.*
COTTON, LESPIEAU, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551415_0020

Série A, n° 776.
N° d'ordre :
1559.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. Louis CHAUMONT,
Agrégé Préparateur à l'École Normale supérieure.

1re THÈSE. — Recherches expérimentales sur le phénomène électro-optique de Kerr et sur les méthodes servant a l'étude de la lumière polarisée elliptiquement.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le juin 1914, devant la Commission d'Examen.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

MM. BOUTY, *Président.*
COTTON, LESPIEAU, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
Doyen	P. APPELL, Professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Doyen honoraire	G. DARBOUX	Géométrie supérieure
Professeurs honoraires	CH. WOLF.	
	J. RIBAN.	
Professeurs	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre sup.
	Y. DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiol. compar.
	GASTON BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	KŒNIGS	Mécanique phys. et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique rationnelle.
	HAUG	Géologie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale.
	CAULLERY	Zool. (Évolution des êtres organisés)
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie.
	ÉMILE BOREL	Théorie des fonctions.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, Anatomie, Physiol. comp.
	MATRUCHOT	Botanique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD	Mathématiques générales.
	MOLLIARD	Physiologie végétale.
	N	Applicat. de l'Analyse à la Géométrie.
	N	Histologie.
Professeurs adjoints	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC	Physique.
	MICHEL	Minéralogie.
	HEROUARD	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.)
	COTTON	Physique.
	LESPIEAU	Chimie.
	GENTIL	Pétrographie.
	SAGNAC	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ	Zool. (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

54778 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

A LA MÉMOIRE

DE

MA GRAND'MÈRE.

A

MES PARENTS.

A MESSIEURS

H. ABRAHAM ET A. COTTON,

Hommage respectueux et reconnaissant.

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR LE

PHÉNOMÈNE ÉLECTRO-OPTIQUE DE KERR

ET SUR LES

MÉTHODES SERVANT A L'ÉTUDE

DE LA

LUMIÈRE POLARISÉE ELLIPTIQUEMENT.

HISTORIQUE.

On peut distinguer quatre périodes dans l'évolution de nos connaissances sur le phénomène de double réfraction électrique.

Dès 1834, divers physiciens prévoient ce phénomène, mais jusqu'en 1874, aucun d'eux ne réussit à le réaliser expérimentalement.

Aussi, après cette longue période d'attente, sa découverte par Kerr en 1875 fut accueillie avec scepticisme. Des expériences de contrôle sont entreprises et cette période de discussion se termine en 1883.

L'existence du phénomène est alors établie, mais il semble qu'au cours de ces quelques années, l'intérêt

qu'on attachait à son étude ait diminué, et pendant la période suivante (1884-1904) les travaux qui lui sont consacrés deviennent de plus en plus rares.

A partir de 1905, l'attention des chercheurs est de nouveau orientée vers la biréfringence électrique, et la période actuelle voit le phénomène de Kerr prendre une place importante dans le groupe des phénomènes électro et magnéto-optiques.

Première période 1834-1874.

Les premières recherches sur la double réfraction électrique sont dues à Faraday [1]. Alors qu'il découvrit la polarisation rotatoire magnétique, ce précurseur illustre devina l'action du champ électrostatique sur la lumière polarisée, mais il ne put réussir à l'observer expérimentalement. Ses recherches portent sur le verre lourd, le flint, le quartz, le spath, l'essence de térébenthine et l'air. Les résultats négatifs obtenus furent confirmés par Wartmann [2].

Cette tentative ne passa pas inaperçue des physiciens, et voici l'opinion émise par Maxwell dans son Traité d'électricité et de magnétisme : « Faraday, qui était tout à fait familier avec la méthode consistant à étudier les déformations des corps transparents au moyen de la lumière polarisée, fit un grand nombre d'expériences dans l'espoir de découvrir quelque action produite sur la lumière polarisée, à son passage dans les milieux où se produit la conduction électrolytique, ou l'induction diélectrique. Il ne réussit à découvrir aucun effet de ce genre,

---

(1) Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, 8e série, avril 1834, § 951-955; 19e série, novembre 1845, § 2216-2220.

(2) Wartmann, *Archives de l'Electricité*, t. II, p. 596-600.

quoique ces expériences fussent dans les meilleures conditions pour découvrir des effets de tension, la force électrique ou le courant étant perpendiculaire à la direction du rayon et à 45° du plan de polarisation. Faraday répéta ces expériences de bien des manières, sans découvrir aucune action exercée sur la lumière par les courants électrolytiques ou l'induction électrostatique » (1).

Dans des Mémoires parus en 1880, Quincke (2) et Röntgen (3) signalent qu'en 1862 et 1873, ils ont recherché la biréfringence électrique du verre. Il est probable que bien d'autres expériences infructueuses furent entreprises qui n'ont jamais été publiées.

Deuxième période 1875-1883.

Premières expériences de Kerr. — C'est en 1875 que John Kerr observa pour la première fois la double réfraction produite par le champ électrique dans un milieu isotrope.

Les diélectriques employés étaient : le verre, la résine, le quartz (4), le sulfure de carbone, la benzine, l'essence de térébenthine et différentes huiles (5). Les observations ont été faites en examinant entre deux nicols croisés le corps soumis à la tension électrostatique, et compensant la double réfraction ainsi produite par une lame de verre comprimée. Le champ électrique n'était pas uniforme et par suite les apparences observées sont assez complexes. On a reproché à Kerr de ne pas les avoir décrites toujours très exactement; en réalité, il ne leur attribuait qu'une

(1) Maxwell, Traduction française de Séligmann-Lui, § 806.

(2) Quincke, *Wiedemann Annalen*, t. X, p. 535.

(3) Röntgen, *Ibid*, p. 77.

(4) J. Kerr, *Philosophical Magazine*, 4e série, t. L, novembre 1875, p. 337-348.

(5) *Ibid*, décembre 1875, p. 446-458.

importance secondaire, et, derrières elles, il a nettement aperçu les lois qualitatives simples du phénomène. La preuve en est fournie par les conclusions très claires des deux Mémoires précédents :

« Lorsqu'une lame de verre fortement électrisée est traversée perpendiculairement aux lignes de force par un faisceau lumineux polarisé, elle exerce sur la lumière une action dépolarisante partielle facilement observable dans un polariscope ordinaire. On obtient une action bien régulière lorsque le plan de polarisation est à 45° des lignes de force, et aucune action régulière lorsque le plan de polarisation est parallèle ou perpendiculaire aux lignes de force. La tension électrique et l'effet optique croissent simultanément. L'effet optique d'une action électrique constante met un certain temps (30 secondes environ dans mes expériences) pour acquérir son entière intensité, il l'atteint en croissant constamment à partir de zéro, et il redevient nul, lentement, après la suppression de la force électrique. On obtient d'aussi bons résultats avec une rapide succession d'électrisations contraires qu'avec une électrisation continue dans la même direction (p. 341). »

« Des expériences précédentes, nous concluons que l'électrisation d'une lame de verre est, au point de vue optique, équivalente à une compression dans la direction des lignes de force. Du verre polarisé électriquement agit sur la lumière comme un cristal uniaxe négatif, l'axe étant parallèle aux lignes de force (p. 344). »

« Le sulfure de carbone traversé par un champ électrique est biréfringent; il agit sur la lumière transmise comme du verre tiré suivant les lignes de force. La force électrique et la double réfraction croissent en même temps et disparaissent simultanément, l'effet optique cessant brusquement et totalement au moment de la décharge électrique. Avec une action électrique intense, quelques

irrégularités furent observées, mais elles sont certainement dues en grande partie, sinon entièrement, au défaut d'uniformité du champ électrique alors considérablement étendu (p. 452). »

« Parmi les liquides examinés, six ont donné des résultats bien définis et constants, ce sont : le sulfure de carbone, la benzine, les huiles de paraffine et de kérosène, l'essence de térébenthine et l'huile d'olive. Ces corps sont nettement biréfringents lorsqu'ils sont polarisés électriquement; ils agissent sur la lumière transmise comme des cristaux uniaxes, l'axe étant dirigé suivant la ligne de force, et le cristal étant négatif dans le cas de l'huile d'olive, positif dans les cinq autres cas. Si on les compare entre eux au point de vue de la grandeur de la double réfraction, les liquides semblent être très différents : le sulfure de carbone est le plus sensible; les huiles de paraffine et de kérosène, les moins sensibles à l'action électrique. Comparés au verre, ce sont des isolants beaucoup plus faibles; mais en tenant compte de cette différence, je crois que le sulfure de carbone lui est bien supérieur, tant au point de vue de l'intensité que de la pureté des effets obtenus. Contrairement au verre, tous les liquides sont caractérisés par l'absence de force coercitive et par la rapidité avec laquelle la double réfraction suit les variations du champ électrique. Le pouvoir biréfringent est maintenu dans les liquides par l'action actuelle de la force électrique, et semble être déterminé en chaque point seulement par la direction et la grandeur du champ en ce point (p. 457). »

Expériences de vérification. — La découverte de Kerr fut accueillie avec défiance par la plupart des physiciens. Sur les conseils de Maxwell et de Helmholtz, des expériences de vérification sont entreprises par Gordon et Mackensie.

Gordon (1) utilise un dispositif optique qui diffère un peu de celui de Kerr : il cherche à observer le déplacement de la frange noire d'un compensateur de Babinet; il ne peut y arriver avec un bloc de verre électrisé semblable à celui de Kerr. Pensant augmenter la grandeur de l'effet produit avec la longueur du verre traversé, il utilise un long condensateur à lame de verre, mais échoue encore.

Mackensie (2) n'eut pas plus de succès dans ses recherches sur le verre et l'essence de térébenthine. Il croit que les apparences décrites par Kerr ne sont pas dues à l'action directe du champ électrique, mais à des causes secondaires dont la principale serait l'échauffement du diélectrique.

De même Grunmach (3), en 1877, ne parvient pas à reproduire les expériences de Kerr sur le verre.

Ces nombreux insuccès proviennent des difficultés expérimentales, particulièrement grandes dans le cas du verre; ce diélectrique ne présente en effet qu'une faible double réfraction électrique et, encore, elle est, le plus souvent, masquée par des phénomènes de trempe dus au forage des trous et à l'échauffement au voisinage des électrodes.

Cependant, peu à peu, des vérifications plus nombreuses sont faites.

Guthrie (4) semble le premier avoir répété les expériences de Kerr, à la séance du 24 juin 1876 de la Physical Society of London.

Gordon (5) revient assez vite sur sa première opinion

---

(1) J.-E.-H. Gordon, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. II, septembre 1876, p. 203-208.

(2) J.-J. Mackensie, *Wiedemann Annalen*, t. II, août 1877, p. 356-359.

(3) L. Grunmach, *Ibid*, t. XIV, 1881, p. 110.

(4) Guthrie, *Nature*, t. XIV, n° 351, 20 juillet 1876, p. 264.

(5) Gordon, *Proc. Roy. Soc. of London*, t. XXVIII, 1879, p. 346-347.

et, en 1879, la double réfraction électrique du verre faisait l'objet d'une expérience de son cours.

Dans son grand Mémoire de 1880 sur l'électrostriction, Quincke [1] prétend avoir observé le phénomène de Kerr, mais, malheureusement, il ne donne aucun détail sur ses expériences.

En 1879, Kerr [2] fait paraître un second Mémoire sur les diélectriques liquides. Un assez grand nombre de liquides sont examinés, mais Kerr croit découvrir des phénomènes différents dans le cas du tétrachlorure d'étain et de la nitrobenzine. Au lieu de s'éclaircir, la question semble devenir plus complexe. C'est alors que de nouvelles expériences de vérification sont entreprises.

Röntgen [3], en 1880, confirme et complète les observations de Kerr sur les diélectriques liquides, mais la vérification la plus minutieuse est faite par Brongersma [4] en 1883.

Il reproduit sous leur forme initiale les premières expériences de Kerr sur le sulfure de carbone et le verre, et décrit avec le plus grand soin les apparences dues au défaut d'uniformité du champ.

A partir de ce moment, on ne peut plus mettre en doute la réalité des faits observés pour la première fois par Kerr en 1875; mais le désaccord subsiste sur leur cause et leur explication.

Origine de la double réfraction. — Kerr considère le champ électrique comme la cause immédiate de la double

---

(1) Quincke, *Wiedemann Annalen*, t. X, avril 1880, p. 536.

(2) Kerr, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. VIII, août 1879, p. 85-102, et septembre 1879, p. 229-245.

(3) W.-C. Röntgen, *Wiedemann Annalen*, t. X, janvier 1880, p. 77.

(4) H. Brongersma, *Wiedemann Annalen*, t. XVI, mars 1882, p. 222-233, et *Philosophical Magazine*, 5e série, t. XIV, p. 127-135.

réfraction observée. D'après lui, la grandeur et la direction du champ déterminent en chaque point d'un milieu primitivement isotrope les propriétés optiques de ce milieu. Cette détermination est indépendante du temps dans le cas du sulfure de carbone, tandis que, pour le verre, les propriétés actuelles conservent une empreinte des états antérieurs. Ces phénomènes sont parfaitement expliqués par les idées de Faraday sur la constitution des diélectriques. Sous l'action du champ, les particules du diélectrique se polarisent et tendent à se grouper en files suivant les lignes de force de même que les grains de limaille de fer dans un champ magnétique. Il en résulte un nouvel arrangement moléculaire qui rend compte de la double réfraction observée. Dans le cas des solides, la force électrique a sans doute à vaincre une résistance analogue à la force coercitive des aimants, tandis que pour les liquides, le groupement des molécules se produit avec une facilité incomparablement plus grande.

A la vérification des résultats de Kerr, Röntgen et Brongersma ajoutent quelques expériences pour essayer de voir si la double réfraction électrique n'est pas causée par le mouvement des particules liquides ou la décharge obscure qui se produit dans le diélectrique. Leurs conclusions, incertaines, sont plutôt négatives : il semble de plus en plus probable qu'on a bien affaire à une action directe du champ électrique sur les ondes lumineuses analogue à la polarisation rotatoire magnétique.

Il est à remarquer que seules, parmi les expériences précédentes, ont réussi celles obtenues avec des champs électriques non uniformes. Il ne faut donc pas s'étonner de voir Quincke, dans son Mémoire de 1880, attribuer à ce défaut d'uniformité le rôle prépondérant. La double réfraction lui paraît causée par l'inégale contraction du diélectrique. Cette explication n'est pas très claire dans le cas des liquides et elle est démentie dès 1880 par de

nouvelles expériences de Kerr qui montrent l'existence de la double réfraction électrique du sulfure de carbone dans un champ uniforme. Quincke répète ces expériences et revient sur son opinion précédente en 1883.

Il n'en est pas moins vrai qu'en 1885, Wiedemann (1), dans un traité d'électricité, reproduit la première théorie de Quincke. Kerr (2) fait alors remarquer qu'elle est en contradiction avec les expériences précédentes, et il publie des recherches effectuées en 1882 sur un carreau de Franklin, et montrant que le verre comme le sulfure de carbone devient biréfringent dans un champ électrique uniforme.

Loi du carré du champ. Constante du sulfure de carbone. — Les premières recherches quantitatives sur la double réfraction électrique ont été faites par Kerr (3) en 1880; elles portent uniquement sur le sulfure de carbone. Le champ uniforme est créé entre deux électrodes de laiton planes et parallèles; elles sont reliées aux deux armatures d'une batterie de bouteilles de Leyde, chargée par une machine électrostatique. La distance D des plateaux est mesurée en unités arbitraires par le nombre des cales en verre, toutes de même épaisseur, qui les séparent; le potentiel V par un électromètre de Thomson, la double réfraction produite Q par un compensateur de Jamin. Avec le système arbitraire d'unités employé par Kerr, Q peut, aux erreurs d'expérience près, être calculée par la formule $Q = \frac{V^2}{57 D^2}$ comme le montre le Tableau suivant :

---

(1) Wiedemann, *Die Lehre von der Electricität*, Vol. II, p. 125.

(2) Kerr, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. XX, octobre 1885, p. 363-372.

(3) Kerr, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. IX, mars 1880, p. 157-174.

D.	V.	Q mesurée.	Q calculée.
1	60	63	63,1
2	90	36	35,5
2	120	64	63,1
3	90	16	15,8
3	120	27	28
4	120	15	15,8
4	150	24	24,6

Généralisant le résultat trouvé pour le sulfure de carbone, Kerr énonce la loi suivante : « L'intensité de l'action électro-optique pour un diélectrique donné, c'est-à-dire la différence des retards des rayons ordinaire et extraordinaire par unité d'épaisseur du diélectrique traversé, est proportionnelle au carré de la force électrique, ou bien à l'énergie du champ électrique par unité de volume, ou encore à la tension électrostatique. »

Il résulte de là que si l'on appelle : H l'intensité du champ électrique, l la longueur du chemin parcouru dans le liquide par un rayon lumineux perpendiculaire aux lignes de force, λ la longueur d'onde de la radiation employée, δ la différence entre les chemins optiques des vibrations parallèles et perpendiculaires aux lignes de force, on peut poser

$$\frac{\delta}{\lambda} = B\,l\,H^2,$$

B étant un coefficient indépendant de l et de H.

A vrai dire, Kerr n'a pas fait varier la longueur du condensateur; il n'a donc pas vérifié la première partie de cette loi qu'il considérait comme évidente.

Nous exprimerons toujours l en centimètres, H en unités électrostatiques (300 volts par centimètre); $\frac{\delta}{\lambda}$ est la différence des chemins optiques évaluée en longueurs d'onde. Avec ces conventions, la constante B est parfaitement définie; elle ne dépend que du diélectrique (composition, état physique, température, pression) et de la longueur

d'onde de la lumière utilisée; on lui a donné le nom de *constante de Kerr.*

En 1883, Quincke [1] répète les expériences précédentes, mais il fait varier aussi bien la longueur que la distance des électrodes et ses recherches portent sur plusieurs liquides (sulfure de carbone, éther, benzine, essence de térébenthine et mélanges de ces divers corps). Un aide maintient le potentiel constant en tournant une machine de Holz, en même temps qu'il observe le spot d'un électromètre, tandis que l'opérateur mesure ce potentiel à l'aide d'un électromètre Thomson et la biréfringence par un compensateur de Babinet. La source lumineuse est un rayon solaire filtré à travers un verre rouge « qui ne laisse passer que des radiations voisines de la raie D ».

Le potentiel est sans doute assez mal connu; dans une expérience, la constante du sulfure de carbone varie de 3,26 à $2,88.10^{-7}$ lorsqu'on supprime une batterie de bouteilles de Leyde mise en parallèle avec le condensateur. D'autre part, la longueur du champ électrique est mal définie; les extrémités des électrodes de nickel ne sont pas en regard les unes des autres. La température n'est pas donnée, Quincke n'ayant pu mettre en évidence les effets de sa variation.

Voici, cependant, pour deux espèces de sulfure de carbone, les valeurs de la constante de Kerr obtenues avec des condensateurs différents.

Distance des électrodes en cm.		0,1615.		0,3230	
Longueur des électrodes en cm.		9,95	19,64	46,17	19,07	47,0
$B10^7$	Sulfure de Kahlbaum.	3,29	3,54	2,91	3,68	2,98
	Sulfure de Heidelberg.	3,04	3,33	3,13	3,59	2,88

Une addition au Mémoire précédent paraît en 1887,

---

[1] QUINCKE, *Wiedemann Annalen*, t. XIX, mars 1883, p. 705-782.

Quincke [1] étudie par les mêmes procédés le chloroforme qui possède une double réfraction électrique négative à peu près égale à celle du sulfure de carbone.

Généralité de la double réfraction électrique. — Pour achever l'étude de cette période, il reste à signaler un Mémoire de Kerr [2] paru en 1882 et faisant suite à celui de 1879. Plus de 100 liquides différents sont examinés; en particulier, quelques corps simples (brome, soufre, phosphore) et quelques séries organiques. Kerr montre qu'il existe une relation très intime entre les caractères chimiques des composés et leur biréfringence électrique. Dans les séries homologues, il y a généralement une progression du pouvoir électro-optique; les corps les plus actifs étant les termes les plus élevés de la série. On peut voir dans ce travail une première ébauche des recherches de Schmidt et de Leiser et une indication de la théorie de l'orientation développée par Cotton et Mouton; mais il ne faut pas oublier que les mesures de Kerr sont uniquement qualitatives, et la seule conclusion qu'il est possible d'en dégager, c'est que la double réfraction électrique est une propriété générale de la matière.

Troisième période 1884-1904.

En 1884, l'existence du phénomène de Kerr est établie définitivement; il peut paraître étrange que les physiciens qui, au moment de sa découverte, semblaient attacher une grande importance à son étude, l'abandonnent alors à peu près complètement.

Les causes de ce changement semblent être de deux

---

[1] Quincke, *Wiedemann Annalen*, t. XXXII, octobre 1887, p. 538-541.

[2] Kerr, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. XIII, mars et avril 1882, p. 153-169, et p. 248-262.

sortes : elles tiennent à la fois aux difficultés rencontrées dans les travaux précédents et à l'orientation générale prise par la physique à la fin du XIXe siècle.

Difficultés des recherches expérimentales sur la double réfraction électrique. — L'étude des deux périodes antérieures a fait ressortir les difficultés considérables rencontrées par les premiers expérimentateurs qui se sont occupés de la double réfraction électrique.

La plus importante tient à la nature même du champ électrique. Il est nécessaire que ce champ existe à l'intérieur du diélectrique étudié. Comme ce diélectrique n'est pas parfait, mais plus ou moins conducteur, on est obligé de mettre les électrodes en contact direct avec lui, sans l'intermédiaire de couches isolantes; la présence du champ entraîne alors une dissipation de l'énergie électrique qui se retrouve sous forme de chaleur. Cette chaleur dégagée n'est pas négligeable par suite de la tension électrostatique considérable, nécessaire pour obtenir une biréfringence appréciable. Elle produit, dans les liquides, des mouvements qui troublent le champ de vue et gênent l'observation, dans les solides, des dilatations qui sont l'origine d'une double réfraction accidentelle se superposant au phénomène étudié.

Les difficultés, grandes déjà lorsqu'on veut simplement observer la biréfringence électrique, augmentent encore s'il s'agit de la mesurer. Le champ électrique doit alors être uniforme et il est curieux de constater l'échec de toutes les tentatives faites avant 1880 pour observer le phénomène dans ces conditions. Le potentiel est généralement fourni par une machine électrostatique ou une bobine et sa mesure précise est difficile. Pour diminuer les causes d'erreur provenant du défaut d'isolement, on est amené à utiliser des champs relativement faibles; la différence de marche des rayons ordinaire et extraordi-

naire est alors une petite fraction de longueur d'onde; sa mesure est délicate.

Le phénomène de Kerr et la théorie électromagnétique de la lumière. — A ces raisons particulières du délaissement du phénomène de Kerr pendant toute la fin du XIXe siècle, viennent se joindre des causes d'ordre plus général.

La Physique entière est alors dominée par les théories de Maxwell. L'analogie de la lumière et de l'électricité est la grande question qui passionne le chercheur. Beaucoup de travaux sont entrepris pour la vérification des relations entre la constante diélectrique des corps et leur indice, entre la vitesse de la lumière et le rapport des unités électriques. La découverte de Hertz vient encore agrandir le champ de ces recherches et donner une valeur plus objective aux hypothèses de Maxwell.

Il serait naturel de supposer que le phénomène de Kerr va, lui aussi, apporter des matériaux nécessaires à la construction de ce grand édifice, et l'on a peut-être pu penser un instant que l'étude de cette action de l'électricité sur la lumière en fournirait la clef de voûte.

Cette attente fut déçue. Le phénomène de Kerr n'établit pas une relation directe entre la lumière et l'électricité; la matière est un intermédiaire indispensable; toutes les tentatives faites dans le vide ou les gaz ont échoué. Comme l'avait prévu Faraday, la double réfraction électrique est une propriété de la matière tout à fait analogue à la polarisation rotatoire magnétique.

Déjà les théories électromagnétiques se sont montrées insuffisantes pour l'explication de ce dernier phénomène; il en sera de même pour le premier; et les conclusions suivantes, d'un Chapitre du Traité de Maxwell, peuvent aussi bien s'appliquer à la biréfringence électrique qu'à la rotation magnétique :

« Nous savons bien peu de choses sur le détail de la constitution moléculaire des corps; aussi n'est-il guère possible qu'on arrive à former une théorie satisfaisante d'un phénomène particulier, tel que celui des actions magnétiques sur la lumière tant qu'une induction fondée sur un grand nombre de cas différents, où l'on aura observé une dépendance entre des phénomènes visibles et des actions moléculaires, ne nous aura appris quelque chose de plus définitif sur les propriétés qu'il convient d'attribuer aux molécules pour satisfaire aux conditions dérivant des faits observés (1). »

Ce sera le rôle de la période actuelle d'aborder l'étude de la constitution moléculaire des corps. En attendant, des essais de théorie du phénomène de Kerr sont entrepris par Pockels (2) et Voigt (3). Ils généralisent les équations de la théorie électromagnétique de la lumière, de façon à tenir compte de l'action d'un champ électrique extérieur, action qui, comme nous venons de le dire, se produit par l'intermédiaire des particules pondérables.

Ces difficultés expérimentales et théoriques expliquent le petit nombre de travaux consacrés à la double réfraction électrique pendant cette période de vingt années. La plupart d'entre eux sont entrepris pour élucider deux points particuliers importants : durée d'établissement du phénomène, valeurs absolues des indices, et il ne reste presque rien sur la loi de Kerr et la détermination des constantes des corps.

Simultanéité des phénomènes électrique et optique. — Les premières recherches précises sur la durée d'établissement

---

(1) Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme.* Trad. de Séligmann-Lui, t. II, p. 531.

(2) Pockels, *Götting. Nachrichten* : Math. phys. Klasse, 1896, p. 102.

(3) Voigt, *Wiedemann's Annalen*, t. LXIX, 1899, p. 297; *Magneto und Electrooptik.* Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner, 1908.

du phénomène de Kerr ont été faites par Blondlot [1] en 1888. Le diélectrique est le sulfure de carbone. Un circuit oscillant est constitué par une batterie de bouteilles de Leyde et une bobine sans fer. Sa période est de $\frac{1}{20\,000}$ de seconde. Le condensateur de Kerr est en parallèle avec la batterie; on étudie au miroir tournant la lumière qu'il rétablit entre deux nicols croisés. Lors de la décharge du circuit, on voit des alternances brillantes et obscures tout à fait analogues à l'aspect d'une étincelle dissociée par le miroir tournant. Si en même temps on examine la lumière rétablie par un tube rempli de sulfure de carbone et placé suivant l'axe de la bobine entre deux nicols croisés, on perçoit un aspect identique; mais les bandes brillantes de l'un des deux phénomènes correspondent aux parties sombres de l'autre. (Le maximum de charge du condensateur se produit à l'instant où le courant est nul.) Par la même méthode, Bichat et Blondlot [2] ont déjà montré en comparant directement les oscillations de la lumière rétablie à celle d'une étincelle produite dans le circuit, que la rotation magnétique du plan de polarisation a lieu sans retard appréciable. Il en résulte que le retard du phénomène de Kerr, s'il existe, n'est qu'une fraction de la durée d'une demi-oscillation, c'est-à-dire une fraction de $\frac{1}{40\,000}$ de seconde.

Blondlot conclut que l'hypothèse émise par Röntgen en 1880, suivant laquelle il serait possible d'expliquer l'apparition de lumière par les mouvements qui se produisent dans le diélectrique, doit être rejetée, et l'on peut affirmer que la double réfraction découverte par le Dr Kerr est bien un phénomène fondamental en relation directe avec les actions électriques.

---

[1] Blondlot, *C. R. Acad. Sc.*, t. CVI, janvier 1888, p. 349; *Journal de Physique*, 2e série, t. VII, p. 91-96.

[2] Bichat et Blondlot, *Journal de Physique*, 2e série, t. I, 1882, p. 364.

En 1899, H. Abraham et J. Lemoine (1) reprennent la question par une méthode entièrement nouvelle. La source lumineuse employée n'est plus une source continue auxiliaire; ils éclairent l'appareil par une étincelle intercalée dans le circuit oscillant lui-même. Ce dernier a une fréquence beaucoup plus grande, il ne comprend plus de self et la capacité est réduite à la cuve de sulfure de carbone. Une série de quatre miroirs oblige la lumière à parcourir un chemin plus ou moins long de l'étincelle au condensateur. La double réfraction est mesurée par un analyseur comprenant un biréfringent et un nicol qu'on tourne de façon à amener à l'égalité les deux images données par le biréfringent. Une cuve d'eau céleste évite les différences de teinte produites par la dispersion.

On constate que lorsque le chemin parcouru par la lumière augmente, la double réfraction diminue très rapidement. Pour 20^{cm}, la rotation du nicol est de $17^{o},3$; pour 100^{cm}, elle n'est plus que de $8^{o},7$; pour 200^{cm}, le phénomène persiste, mais il est très faible, et enfin pour 400^{cm}, tout phénomène disparaît, même en lumière blanche.

La discussion de ces résultats conduit MM. Abraham et Lemoine à conclure que le phénomène de Kerr disparaît entièrement dans un temps inférieur à celui que met la lumière à parcourir 300^{cm}, c'est-à-dire 10^{-8} seconde.

La même méthode est de nouveau appliquée en 1904 par John James (2) qui confirme les résultats précédents.

Des Coudres (3) avait déjà montré, en 1893, qu'il est

---

(1) H. Abraham et J. Lemoine, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXIX, juillet 1899, p. 206; *Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. XX, p. 264-287.

(2) J. James, *Annalen der Physik*, 4e série, t. XV, novembre 1904, p. 954-987.

(3) Des Coudres, *Verhandlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte*, 65. Versammlung, 2. Teil, p. 67, 68. Nürnberg, 1893.

possible de constater la double réfraction du chloroforme avec un condensateur soumis à des oscillations électriques de 20.10^6 périodes par seconde. Il indique un procédé de compensation de la biréfringence par un second condensateur en série avec le précédent. Cette méthode permet de déterminer directement la longueur d'onde des vibrations électriques et de mesurer les constantes de Kerr de liquides assez mauvais isolants. Cette dernière application de la méthode de Des Coudres a seule été faite par Schmidt, puis Leiser.

Retards absolus. — Sous l'influence de la tension électrostatique, un milieu isotrope acquiert les propriétés d'un cristal uniaxe; cela résulte des expériences de Kerr et de Quincke. La connaissance de la constante électro-optique permet de calculer la différence des indices ordinaire et extraordinaire pour une tension donnée.

De la relation

$$\frac{\delta}{\lambda} = B l H^2,$$

on déduit

$$n_e - n_0 = B \lambda H^2,$$

(B est un nombre algébrique, dont le signe est positif dans le cas des corps présentant les propriétés des cristaux uniaxes positifs : sulfure de carbone, nitrobenzine; négatif dans le cas des corps présentant les propriétés des cristaux uniaxes négatifs : verre, chloroforme).

Exemple : Pour le sulfure de carbone $B = 3.10^{-7}$, $\lambda = 0{,}6.10^{-4}$, $H = 100$ (30 000 volts par centimètre) :

$$n_e - n_0 = 1{,}8.10^{-7}.$$

On peut maintenant se demander quel rapport il existe entre ces deux indices et l'indice primitif n du corps étudié. La résolution expérimentale de cette question est très difficile, car elle nécessite la comparaison

interférentielle de deux faisceaux lumineux traversant, l'un le milieu isotrope, l'autre le milieu contraint, et la plus faible élévation de température produite dans ce dernier par le champ électrique provoque des variations des indices n_e et n_0 bien supérieures à leurs différences.

Exemple : Pour le sulfure de carbone, la variation de température $\Delta t = \frac{2^\circ,25}{10000}$, ou $\frac{1}{5000}$ de degré, produit une variation d'indice $\Delta n = 1,8.10^{-7}$ égale à la différence $n_e - n_0$ obtenue dans l'exemple précédent.

La question des retards absolus a été étudiée expérimentalement par Quincke (1) et Kerr (2).

Le premier de ces physiciens n'a pu observer un phénomène suffisamment régulier. Kerr a été plus heureux : la différence $n_0 - n$ est trop faible pour être mise en évidence par ses expériences, mais il n'en est plus de même de $n_e - n$, qui se montra du signe et de l'ordre de grandeur de $n_e - n_0$:

« Lorsqu'un faisceau lumineux traverse un milieu soumis à l'induction électrostatique perpendiculairement aux lignes de force et est représenté par deux composantes dont les plans de polarisation sont respectivement perpendiculaire et parallèle aux lignes de force, l'effet optique propre et immédiat de la tension électrique est un changement de vitesse de la première composante.

» Dans l'hypothèse de Fresnel, c'est donc seulement la vibration suivant la ligne de force qui a sa vitesse de transmission retardée ou accélérée suivant que le diélectrique est positif ou négatif. »

Ces résultats ont été obtenus avec le sulfure de carbone, l'huile de paraffine, l'huile de colza et l'huile de phoque; nous verrons plus loin qu'ils n'ont pas été confirmés

---

(1) Quincke, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. XXXVII, 1894, p. 508.

(2) Kerr, *Ibid*, p. 380-394, et t. XXXVIII, p. 144-146.

par des études faites sur d'autres liquides et que la question des retards absolus exige de nouvelles recherches.

Recherches diverses (*Kerr, Lemoine, Schmidt*). — C'est encore à Kerr [1] que nous devons la première étude de la dispersion du phénomène de double réfraction électrique. Le diélectrique employé était le sulfure de carbone. Le condensateur est placé entre deux nicols dont les plans de polarisation sont parallèles et à 45° du champ. La lumière sortant de l'analyseur est examinée au spectroscope. En faisant varier le potentiel, on voit se déplacer dans le spectre une frange noire qui correspond à la radiation pour laquelle le retard est $\frac{\lambda}{2}$. Les potentiels pour lesquels cette frange est bissectée par les raies C, D, F et G sont mesurés. Il est facile d'en déduire, pour ces radiations, les valeurs relatives de la constante électro-optique du sulfure de carbone. Kerr trouve qu'elle varie en raison inverse de $\lambda^{\frac{3}{2}}$.

Ces mesures, de même que celles de 1880, sont faites en unités arbitraires, et il est impossible d'en déduire une valeur absolue de la constante du sulfure de carbone. Une détermination de cette constante a été faite en 1896 par Lemoine [2]. La tension électrique est produite par une machine de Wimshurst, le potentiel mesuré par un électromètre absolu Abraham et Lemoine, la double réfraction par un compensateur de Babinet. Lemoine trouve que la loi du carré est exacte à $\frac{1}{100}$ pour des potentiels variant de 7000 à 21 000 volts. Il en déduit pour valeur de la constante $3{,}70 . 10^{-7}$; la radiation employée est mal définie, la lumière est simplement filtrée par un verre rouge. Cette valeur est certainement trop élevée; la

---

[1] Kerr, *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1892, Edimbourg, p. 157-158.

[2] Lemoine, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXII, avril 1896, p. 835-837.

cause d'erreur provient sans doute, soit de la mesure de la distance des électrodes ($0^{cm},35$), soit de l'étalonnage du compensateur. On peut encore reprocher à l'auteur de n'avoir pas étudié l'influence des impuretés du sulfure de carbone.

Dans ce travail, Lemoine donne une formule destinée à tenir compte du défaut d'uniformité du champ au voisinage des extrémités des électrodes. Nous reviendrons plus loin sur cette correction.

En 1901, W. Schmidt (1) étudie un grand nombre de liquides par la méthode de compensation imaginée par Des Coudres. Les liquides examinés sont introduits dans un condensateur fixe. La biréfringence est compensée par un liquide étalon (cumène) placé dans un condensateur d'épaisseur variable. La lumière est fournie par une lampe Nernst et purifiée par trois écrans colorés dont les centres de gravité optique sont $0^{\mu},68$, $0^{\mu},58$ et $0^{\mu},49$. Les sources électriques employées sont : la machine électrostatique, la bobine d'induction et le dispositif de Lecher. Sauf dans ce dernier cas qui a servi pour des liquides très conducteurs, l'approximation est de 1 à 5 pour 100.

Schmidt détermine ainsi en valeurs relatives les constantes électro-optiques d'un grand nombre de liquides. Il trouve que la dispersion dépend de la nature du diélectrique. Une élévation de température diminue la constante de Kerr; cette diminution est à peu près la même pour le sulfure de carbone et le cumène : 1 pour 100 pour $2^{\circ},2$. Enfin Schmidt étudie des mélanges et montre que la loi d'addit vité ne s'applique pas. Citons enfin les expériences faites par Rücker (2) qui a réussi à montrer

(1) Schmidt, *Göttinger Dissertation*, 1901, 51 pages; *Annalen der Physik*, 4e série, t. VII, 1902, p. 142-175.

(2) Rücker, *Lumière électrique*, t. XXVIII, p. 231-234; *The Electrician*, t. XX, 1888, p. 599.

en projection divers aspects du phénomène de Kerr.

Pour terminer l'étude de cette période, il me reste à signaler la monographie de la collection Scientia, faite par Néculcéa [1]; on y trouvera un résumé des travaux précédents et un exposé des théories de Pockels et Voigt.

Quatrième période 1905-1913.

Vers 1905, l'attention des physiciens a été détournée des théories de Maxwell où l'on suppose les milieux continus; elle se porte de plus en plus vers la considération de particules, chargées ou non, constituant les milieux matériels.

Parmi tous les phénomènes, dont l'étude permettra peut-être d'arriver un jour à la connaissance de ces particules, la double réfraction électrique tient une place importante, en raison du rapport étroit qu'elle présente certainement avec les propriétés moléculaires, et il est curieux de constater que la cause de la faveur actuelle du phénomène de Kerr est précisément celle qui a provoqué son abandon 20 années auparavant.

Influence de la découverte de la biréfringence magnétique. — Déjà on connaissait les propriétés optiques des liqueurs mixtes (Meslin) et des solutions colloïdales (Majorana) placées entre les pôles d'un aimant, lorsqu'en 1907 MM. Cotton et Mouton parviennent à mettre en évidence la double réfraction magnétique des liquides purs.

Cette importante découverte renforce les raisons qui poussaient les physiciens vers l'étude du phénomène de Kerr. Comme ce dernier, le phénomène de MM. Cotton et Mouton est proportionnel au carré du champ et en

---

[1] Néculcéa, *Le phénomène de Kerr* (*Scientia*, février 1902).

relation directe avec la constitution de la molécule chimique. Il est à présumer qu'il donnera lui aussi des renseignements sur la nature de ces particules (molécules ou groupements de molécules) dont la liberté détermine la mobilité des liquides.

Dès lors, les explications de ces deux phénomènes ne seront pas indépendantes, et, dans l'établissement de la théorie, on devra constamment être guidé par les résultats expérimentaux de leur étude comparative. Comparaison des dispersions, comparaison des coefficients de température, comparaison des séries chimiques homologues, superposition des deux phénomènes sont autant de questions intéressantes.

A l'heure actuelle, elles ont été résolues en partie, mais il est regrettable que la difficulté des mesures ne permette pas une plus grande approximation dans les résultats. Nous avons déjà vu que, pour le champ électrique, cette difficulté provient de la conductibilité des corps; pour le champ magnétique, elle est due à la petitesse du phénomène produit par les électro-aimants actuels. Il nous faudra donc à la fois rendre plus délicats nos moyens d'observation et augmenter la puissance de nos moyens d'action.

Recherches théoriques. — En dehors de la théorie de Voigt, dont nous avons déjà parlé, deux autres explications des biréfringences électrique et magnétique ont été données.

D'après Havelock [1], la double réfraction serait due à une distribution anisotrope de particules semblables. De la même façon s'explique le phénomène de Majorana

---

[1] T.-H. Havelock, *Proc. Roy. Soc. London*, (A), *t.* LXXVII, 1905, p. 170-182; (A), t. LXXX, 1907, p. 28-44; *Phys. Review*, t. XXVIII, 1909, p. 136-139.

et la double réfraction cristalline. Cette théorie conduit aux formules suivantes :

$$n_e = n - \frac{2}{15}\frac{(n^2-1)^2}{n}\varepsilon,$$

$$n_0 = n + \frac{1}{15}\frac{(n^2-1)^2}{n}\varepsilon,$$

n_e et n_0 représentent les deux indices de la substance biréfringente, n l'indice de la substance à l'état isotrope et ε est une constante indépendante de la longueur d'onde. On en déduit les deux conditions

$$\frac{n_e - n}{n_0 - n} = -2, \qquad n_e - n_0 = \frac{1}{5}\frac{(n^2-1)^2}{n}\varepsilon.$$

La première donne une relation entre les retards absolus; la seconde peut s'écrire $\frac{B\lambda n}{(n^2-1)^2} = C$; elle relie la dispersion de la double réfraction à la dispersion de l'indice moyen.

Une deuxième explication a été indiquée par Larmor (1) pour le phénomène de Kerr et proposée par MM. Cotton et Mouton (2) pour la double réfraction magnétique. La biréfringence serait due, dans un cas comme dans l'autre, à une action directrice exercée par le champ sur les molécules du liquide qui les orienterait parallèlement les unes aux autres si l'agitation thermique ne s'y opposait. M. Langevin (3), qui déjà avait donné une théorie analogue du paramagnétisme, a développé quantitativement les conséquences de cette hypothèse.

Bien que les points de départ soient très différents, cette théorie conduit à peu près aux mêmes conclusions

---

(1) Larmor, *Phil. Trans.*, (A). t. CXC, 1898, p. 236.

(2) A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Acad. Sc.*, t. CL, mars 1910, p. 774-777; *Ann. de Chim. et de Phys.*, 8e série. t. XIX, 1910, p. 153-186, et t. XX, 1910, p. 194-275.

(3) Langevin, *Le Radium*, t. VII, septembre 1910, p. 249-260.

que celle de Havelock; on retrouve les deux relations précédentes pour les retards absolus et la dispersion.

La théorie de Voigt [1], au contraire, se distingue nettement des deux précédentes. Elle rattache la double réfraction à la polarisation rotatoire magnétique et au phénomène de Zeeman; le champ agit en modifiant la période des électrons, c'est une action intra-moléculaire.

Cette théorie fait prévoir pour la biréfringence magnétique un phénomène encore beaucoup plus faible que celui qui a été observé; pour les actions électriques, elle conduit à admettre l'existence d'un phénomène analogue à celui de Zeeman; ce dédoublement des raies d'émission par le champ électrique a souvent été cherché en vain. M. Stark [2] semble avoir observé récemment un effet de ce genre; son étude montrera s'il peut se rattacher à la double réfraction électrique et s'expliquer par les hypothèses de Voigt [3].

D'autre part, cette théorie conduit à la relation $\frac{n_e - n}{n_0 - n} = + 3$ qui ne semble pas vérifiée et elle n'explique pas l'influence considérable de la température, dont les théories moléculaires rendent facilement compte.

Dans le Mémoire de MM. Cotton et Mouton déjà cité, on trouvera, à côté d'un travail expérimental très important, les raisons qui leur font préférer l'hypothèse de l'orientation des molécules à celle de leur distribution anisotrope.

Une généralisation des deux théories de Langevin et de Voigt vient d'être faite récemment par M. Enderle [4]

---

[1] Voigt, *Magneto und Electro-Optik*, 1908, p. 374; *Göttingen Nachrichten*, 1912, p. 577-593, 832-843, 861-874; 1913, p. 215-220.

[2] Stark, *Sitzungsberichte der König. preuss. Akademie*, novembre 1913, p. 931-946.

[3] *Cf.* Zeeman, *Proceedings Amsterdam*, t. XIV, 1911, p. 2.

[4] A. Enderle, *Inauguraldissertation Freiburg*, 1912, 85 pages.

sous la direction de Pockels. Signalons enfin l'étude critique de Natanson [1] qui montre que les théories de Voigt et de Havelock conduisent à peu près aux mêmes résultats. Il nous reste, pour terminer cette étude historique, à donner un aperçu rapide des nombreux travaux expérimentaux entrepris sous l'impulsion nouvelle créée par ces vues théoriques.

Retards absolus. — Malgré de grandes difficultés expérimentales déjà signalées, Æckerlein [2] réussit à mettre en évidence les différences $n_e - n$ et $n_0 - n$ pour la nitrobenzine et le nitrotoluène. La méthode optique est semblable à celle de Kerr : les deux faisceaux qui interfèrent sont obtenus par des miroirs de Jamin et passent, l'un entre les deux armatures du condensateur, l'autre en arrière de l'une d'elles. Mais au lieu de se servir d'une machine électrostatique, Æckerlein produit un champ alternatif par des oscillations électriques, de façon à diminuer l'influence de la conductibilité; la source lumineuse est une étincelle placée dans le circuit du condensateur. Les résultats sont en contradiction avec la théorie de Voigt, l'une des vibrations est retardée, tandis que l'autre est accélérée, et pour la nitrobenzine, la relation $\frac{n_e - n}{n_0 - n} = -2$ est à peu près vérifiée.

La question des retards absolus a été étudiée de nouveau par Cabannes [3] sur le cumène qui est un isolant bien supérieur à la nitrobenzine et lui permet d'utiliser pour l'étude de cette question un champ alternatif à 50 périodes. Les observations sont alors faites à l'aide d'un

---

(1) L. Natanson, *Krak. Anz.*, (A), 1910, p. 256-277.

(2) Æckerlein, *Physikalische Zeitschrift*, t. VII, juillet 1906, p. 594-601. — Voigt, *Ibid*, p. 811-812. — Æckerlein, *Ibid.*, t. VIII, p. 117-118.

(3) J. Cabannes, *Ann. de la Fac. de Marseille*, t. XVIII, fasc. XI, 1909.

dispositif stroboscopique ou par enregistrement photographique. Cabannes conclut également que les vitesses de propagation des deux composantes sont modifiées en sens inverses.

Ces résultats semblent en accord avec les théories moléculaires, mais la question des retards absolus n'est pas entièrement résolue.

Au point de vue théorique, Pockels (1) a montré la nécessité de tenir compte du phénomène d'électrostriction dans l'interprétation des résultats expérimentaux. D'ailleurs, ceux-ci sont encore bien imparfaits; pour le sulfure de carbone en particulier, Æckerlein n'a pas réussi à observer le déplacement des franges et nous n'avons que les expériences de Kerr.

Durée d'établissement de la biréfringence électrique. — Depuis les expériences de MM. Abraham et Lemoine, cette question importante a fait peu de progrès.

Bætge (2) a montré que, pour la nitrobenzine, la durée d'établissement de la double réfraction électrique est inférieure à 10^{-6} seconde. Il se servait de la méthode de Mandelstam (3) déjà employée par Æckerlein, pour produire des ondes électriques avec des différences de phases variables et connues.

M. Gutton (4) a repris la question par une méthode analogue à la méthode de compensation de Des Coudres. Au lieu de comparer directement la double réfraction à l'action électrique qui la produit, il compare les phénomènes optiques dans deux condensateurs remplis de

(1) Pockels, *Le Radium*, t. IX, avril 1912, p. 148-150.

(2) E. Bætge, *Strazb. Diss.*, 1907.

(3) Mandelstam et Papalexi, *Phys. Zeit.*, t. VII, mars 1906, p. 303-306.

(4) Gutton, *Journal de Physique*, 5e série, t. III, 1913, p. 206-217, et 445-449.

liquides différents. L'un de ces condensateurs est réglé de telle façon que, si on les charge en parallèle avec une machine de Holz, les deux biréfringences se compensent exactement. Si maintenant on excite le champ avec des ondes hertziennes assez courtes, l'extinction ne subsiste plus et ne peut s'obtenir en agissant sur la distance des plateaux du condensateur réglable. La source lumineuse continue est alors remplacée par une étincelle placée dans le circuit oscillant et l'on peut de nouveau obtenir l'extinction en réglant les plateaux à une distance qui dépend de la longueur d'onde des oscillations électriques. Pour une fréquence inférieure à une certaine valeur limite, on retrouve la même distance qu'avec un champ continu; la période correspondante permet à M. Gutton de calculer les durées d'établissement complet du phénomène. Elles sont de l'ordre du temps de relaxation de Maxwell et d'autant plus courtes que la constante de Kerr est plus grande : bromonaphtaline $0,6.10^{-8}$, sulfure de carbone $1,4.10^{-8}$, toluène $1,7.10^{-8}$ seconde.

Ces résultats sont en accord avec les théories moléculaires; au contraire, d'après la théorie de Voigt, le phénomène optique devrait suivre le phénomène électrique dans un temps beaucoup plus court. On voit la grande importance de ces expériences, et l'intérêt qu'il y aurait à confirmer ces résultats dans d'autres conditions expérimentales se prêtant mieux à une discussion complète.

Loi de Kerr. — La proportionnalité de l'effet optique au carré de l'action électrique se trouve incidemment vérifiée dans la plupart des travaux qu'il nous reste à signaler. Les théories prévoient cette loi tout au moins pour les champs faibles. Si l'on adopte l'hypothèse de l'orientation moléculaire, on voit que lorsque le champ augmente indéfiniment, la double réfraction doit tendre vers une valeur limite correspondant à une orientation

complète des molécules. Les tensions que peuvent supporter les liquides sont bien trop faibles pour nous permettre d'approcher de cette limite et jamais l'expérience n'a pu déceler une diminution de la constante de Kerr pour les potentiels les plus forts que nous puissions réaliser.

Pour les très faibles champs, au contraire, un travail d'Elmen (1) semblait montrer une augmentation de la constante du sulfure de carbone. Ces expériences refaites par Morse (2) amènent à conclure que la loi de Kerr est exacte à l'approximation des mesures.

Walter Kœnig (3) a expliqué le résultat inexact d'Elmen par une erreur systématique provenant de la trempe des glaces qui fermaient la cuve contenant le liquide.

Dispersion. — Kerr, en 1892, a montré que la biréfringence électrique varie avec la longueur d'onde.

La première étude précise de cette dispersion est due à H.-L. Blackwell (4). Le diélectrique employé est du sulfure de carbone très soigneusement purifié. Pour chaque radiation, la biréfringence est comparée à celle obtenue avec le même voltage pour la lumière jaune du sodium; l'emploi d'une source variant lentement (batterie d'accumulateurs) lui permet alors d'éviter les erreurs dues à la mesure du potentiel. La méthode optique est analogue à celle de Kerr; mais comme ici on ne peut produire un retard d'une demi-longueur d'onde, l'appareil comporte un compensateur en plus du spectroscope.

Blackwell a ainsi tracé une courbe de dispersion qui ne s'accorde pas exactement avec la loi indiquée par Kerr.

---

(1) G.-W. Elmen, *Phys. Rev*, t. XX, 1905, p. 54-61; *Ann. d. Phys.*, 4e série, t. XVI, p. 350.

(2) L.-B. Morse, *Phys. Rev.*, t. XXIII, 1906, p. 252-253.

(3) Walter Kœnig, *Ann. der Phys.*, 4e série, t. XXVIII, 1909, p. 413-420.

(4) H.-L. Blackwell, *Proc. Amer. Acad.*, t. XLI, 1906, p. 645-667.

Cette étude de la dispersion du phénomène a été reprise par Hagenow [1] en 1908.

Un faisceau de lumière solaire est dispersé avant de traverser la cuve. Le retard produit est d'une longueur d'onde et il est très exactement repéré par la méthode de Brace [2]. La différence de potentiel est obtenue par une machine électrostatique; elle est réglée et maintenue constante par une pointe de décharge; un électromètre absolu de Kaufmann [3] la mesure avec une précision de 1 pour 100. Le sulfure de carbone est distillé plusieurs fois avec du chlorure de calcium fondu et soigneusement filtré. Les résultats, en accord avec ceux de Blackwell, ne confirment pas la loi donnée par Kerr, mais donnent une courbe de dispersion plus inclinée vers le bleu et moins vers le rouge.

Mac Comb [4] relie les variations de la constante de Kerr à celles de l'indice par la relation empirique $\frac{\partial B}{\partial \lambda} = k \frac{\partial n}{\partial \lambda}$, en accord avec les expériences précédentes.

La même année, des mesures de MM. Cotton et Mouton [5] montrent que la dispersion de la biréfringence électrique de la nitrobenzine est la même que la dispersion de la biréfringence magnétique.

Enfin, en 1909, Havelock donne la formule théorique $\frac{B\lambda n}{(n^2-1)^2} = C$, qui s'applique également aux deux phénomènes et se trouve en accord avec les mesures de Hagenow.

Des expériences soignées ont été faites simultanément

---

(1) C. Hagenow, *Phys. Review*, t. XXVII, septembre 1908, p. 196-208.

(2) B. Brace, *Phys. Review*, t. XVIII, 1904, p. 70; t. XIX, p. 218.

(3) J.-E. Almy, *Ann. der Phys.*, 4e série, t. I, 1900, p. 508.

(4) H.-E. Mac Comb, *Phys. Rev.*, t. XXVII, octobre 1908, p. 336.

(5) A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXLVII, juillet 1908, p. 193.

par Mac Comb [1] pour la biréfringence électrique et par Skinner [2] pour la biréfringence magnétique et ont porté sur une douzaine de liquides. Les auteurs concluent qu'aux erreurs près des mesures, les deux dispersions électrique et magnétique sont les mêmes pour un même liquide et se trouvent bien représentées par la formule de Havelock.

Malheureusement, cette loi de dispersion peut également s'obtenir en partant de l'hypothèse de Voigt ou de celle de l'orientation moléculaire, et ne permet pas de choisir entre les deux théories.

Biréfringence électrique et constitution chimique. — Leiser [3] a étudié la double réfraction électrique d'un grand nombre de composés organiques. Il se sert de la méthode de Des Coudres déjà mise en œuvre par Schmidt, mais en la perfectionnant beaucoup. L'emploi d'un analyseur à pénombre permet d'augmenter la sensibilité. La cuve compensatrice construite avec soin est remplie de sulfure de carbone. Des tables de correction, dressées expérimentalement, permettent de tenir compte de la perturbation du champ électrique au voisinage des bords des électrodes et de la variation avec la température de la constante du sulfure de carbone.

Les résultats montrent que la valeur de la constante électro-optique est en relation très étroite avec la constitution chimique. Des règles encore empiriques permettent de deviner la constante d'un composé déterminé et inversement l'étude de la biréfringence électrique pourrait donner des indications sur la structure moléculaire d'un corps inconnu.

---

(1) H.-E. Mac Comb, *Phys. Rev.*, t. XXIX, décembre 1909, p. 525-540.

(2) C.-A. Skinner, *Phys. Rev.*, t. XXIX, décembre 1909, p. 541-551.

(3) R. Leiser, *Abh. Deuts. Bunsen. Gesellschaft*, n° 4, 71 pages, Halle, W. Knapp, 1910.

Par la méthode de Schmidt, A. Lippmann (1) a étendu ces recherches à d'autres composés et étudié des solutions. Il a montré que le radical CN, substitué dans un noyau benzénique, donne un composé plus biréfringent que le radical NO^2 et il a ainsi pu étudier des corps dont la constante de Kerr est supérieure à celle de la nitrobenzine qui est déjà cent fois plus active que le sulfure de carbone.

Ces résultats sont analogues à ceux que MM. Cotton et Mouton (2) ont obtenus pour la biréfringence magnétique, et l'étude comparative de ces deux phénomènes nous donne des renseignements sur l'anisotropie des molécules. Peut-être pourra-t-on se faire une idée de leur symétrie en superposant les champs électrique et magnétique; mais, à l'heure actuelle, nos moyens d'investigation semblent encore bien faibles pour aborder ce problème (3).

Étude du verre. — Tauern (4) a étudié différents verres d'Iéna; il a montré que la constante de Kerr dépend beaucoup de la constitution chimique; elle est positive et assez forte pour les flints riches en plomb (environ 10^{-8} pour 70 pour 100 de PbO); au contraire, pour les crowns elle est faible et peut même paraître négative. Mais, en corrigeant les résultats de la biréfringence causée par la pression des électrodes, tous les verres étudiés ont une constante électro-optique positive ou nulle.

Giurgea (5) a montré l'importance de l'échauffement

---

(1) Alex. Lippmann. *Dissertation Leipzig*, 1912, 172 pages.

(2) Cotton et Mouton, *Ann. de Chimie et de Phys.*, 8e série, t. XXVIII, février 1913, p. 209-243.

(3) Cotton, *C. R. Acad. Sc.*, t. CLV, 1912, p. 1232.

(4) Tauern, *Dissertation Freiburg*, 45 pages, 1909; *Ann. der Phys.*, 4e série, t. XXXII, 1910, p. 1064-1084.

(5) E. Giurgea, *Thèse Paris*, 1912, Chap. II.

du verre; la biréfringence correspondante persiste un certain temps après la décharge du condensateur, tandis que celle qui est directement produite par le champ électrique disparaît dans un temps inappréciable.

De ces expériences, il semble résulter que la double réfraction négative du verre observée par Kerr et Brongersma est entièrement due aux causes perturbatrices.

Variation de la biréfringence électrique avec la température. Phénomène de Kerr dans les vapeurs et les gaz. — Röntgen et Kerr ont recherché la double réfraction électrique dans l'air et les gaz, mais ils n'ont réussi à observer aucun effet de ce genre. Schmidt a montré que la constante électro-optique du sulfure de carbone diminue lorsque la température augmente et d'autant plus vite que cette dernière est plus élevée. Morse (1) s'est alors demandé ce que devient cette loi de variation au voisinage du point d'ébullition; il a étudié le sulfure de carbone de 24° à 41°,6 sans obtenir de changement marqué dans la vitesse de décroissance et il conclut que rien ne fait prévoir que l'effet soit nul au point d'ébullition ou à l'état gazeux.

L'insuccès des premiers physiciens qui ont cherché le phénomène de Kerr dans les gaz, doit être attribué à la nature chimique des corps étudiés. Les expériences les plus précises ont été faites sur l'air; Zeeman (2) a montré que la constante de l'air liquide est environ $\frac{1}{20}$ de celle du sulfure de carbone; il doit en résulter pour l'air atmosphérique une biréfringence plus de 100000 fois plus faible que celle du sulfure de carbone et qui, par suite, n'a pas pu être décelée.

Guidé par ses recherches sur les séries de liquides, Leiser (3) a choisi des gaz à molécules fortement aniso-

(1) L.-B. Morse, *Phys. Review*, t. XXIII, 1906, p. 251-252.

(2) Zeeman, *Proc. Amsterdam*, t. XIV, décembre 1911, p. 650-55.

(3) Leiser, *Phys. Zeitschr*, t. XII, novembre 1911, p. 955-956.

tropes et il lui a été relativement facile de mettre en évidence leur double réfraction électrique. Hansen [1], continuant le travail de Leiser, a montré que la constante de Kerr d'un gaz est proportionnelle à la pression et que la loi d'additivité s'applique aux mélanges de gaz.

Mesures de la constante du sulfure de carbone. — Il nous reste à parler des déterminations en valeur absolue de la constante du sulfure de carbone.

La connaissance exacte de cette constante est importante, car la plupart des liquides ont été comparés, avec précision, à ce corps par la méthode de Des Coudres.

Les résultats obtenus par Quincke (*cf.*, p. 11) varient de plus de 20 pour 100 d'une expérience à l'autre. Si l'on fait la moyenne des nombres fournis par du sulfure de Kahlbaum, on obtient $3{,}28.10^{-7}$; un sulfure de provenance d'Heidelberg donne de même $3{,}19.10^{-7}$; enfin, si l'on fait la moyenne de l'ensemble des valeurs données pour les différents sulfures par un grand condensateur de 47^{cm} de longueur, on trouve $2{,}97.10^{-7}$. La longueur d'onde est voisine de $590^{\mu\mu}$, et la température n'est pas spécifiée.

Lemoine (*cf.*, p. 20), opérant à la température ordinaire et avec un faisceau grossièrement monochromatique obtenu par filtration à travers un verre rouge, obtient la valeur beaucoup plus forte $3{,}7.10^{-7}$.

Kœnig a fait subir aux expériences d'Elmen (*cf.*, p. 29) une correction permettant d'en déduire la constante de Kerr; voici les valeurs calculées pour trois longueurs d'onde :

$$\lambda = 620^{\mu\mu}, \qquad 560^{\mu\mu}, \qquad 540^{\mu\mu},$$
$$B = 2{,}87.10^{-7}, \quad 3{,}76.10^{-7}, \quad 4{,}03.10^{-7},$$

la température est voisine de 21°.

Il est impossible d'attacher une grande importance à

---

[1] D.-E. Hansen, *Dissertation Berlin*, 1912, 61 pages.

ce travail. La méthode employée pour la mesure de la biréfringence est celle de Brace, et Mac Comb a déjà fait remarquer que la formule utilisée pour calculer le retard à partir des rotations du compensateur est inexacte.

Blackwell dans son travail sur la dispersion (*cf.*, p. 29) a fait une détermination de la valeur absolue de la constante pour les raies jaunes du sodium; il trouve $3{,}57 . 10^{-7}$ à 24°. MM. Cotton et Mouton [1] ont incidemment mesuré la constante de Kerr du sulfure de carbone pour la lumière jaune du sodium; ils indiquent qu'ils n'ont pas vérifié le voltmètre employé et donnent « à titre de renseignement » la valeur $3{,}1 . 10^{-7}$ à 22°.

Les courbes de dispersion données par Hagenow et Mac Comb (*cf.*, p. 30 et 31) ont été obtenues en mesurant pour différentes radiations la valeur absolue de la constante. Voici pour quelques longueurs d'onde les valeurs de $B . 10^7$ pour deux espèces de sulfure de carbone. Le premier nombre correspond à un sulfure commercial à 22° et le second à du sulfure de Kahlbaum pris à 22°,5 :

$\lambda = 540$...	3,25	3,51	$\lambda = 560$...	3,09	3,36
$\lambda = 580$...	2,95	3,17	$\lambda = 600$...	2,80	3,00

Il semblerait résulter de là que les constantes des deux sulfures utilisés sont différentes; les discordances entre les deux valeurs sont en effet notablement supérieures aux erreurs expérimentales admises par les auteurs; malheureusement, pour plusieurs échantillons pris dans un même flacon, Mac Comb trouve des écarts qui, bien qu'un peu plus faibles, sont du même ordre. Le retard (d'une longueur d'onde) étant exactement connu, il faut sans doute attribuer ces différences aux mesures électriques : le potentiel est obtenu par une machine de Holtz et mesuré par un électromètre absolu du type bifilaire

---

[1] Cotton et Mouton, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 8e série, t. XX, 1910, p. 206.

dont l'étalonnage peut entraîner des erreurs assez grandes. D'autre part, aucun détail n'est donné sur la mesure de la distance de $0^{cm},175$ qui sépare les armatures du condensateur.

Enfin, les dernières déterminations de la biréfringence électrique du sulfure de carbone ont été faites par Tauern (*cf.*, p. 32). La source électrique utilisée est une batterie d'accumulateurs, mais la mesure de la biréfringence est certainement moins exacte que dans les expériences d'Hagenow et Mac Comb. Dans une première série de mesures où le potentiel est déterminé électrostatiquement, les valeurs obtenues pour $B.10^7$ sont 3,198 pour $\lambda = 589$; 3,299 pour $\lambda = 578$ et 3,682 pour $\lambda = 546$. Enfin, dans une dernière détermination où le potentiel est déterminé par une mesure électromagnétique de courant, Tauern trouve 3,042 pour la raie jaune du sodium à 20°.

En résumé, les déterminations de la constante de Kerr du sulfure de carbone ne sont pas très nombreuses; la plupart d'entre elles ont d'ailleurs été faites incidemment. Les résultats obtenus assez peu concordants sont représentés par les courbes de la figure 1; j'ai porté en abscisses les longueurs d'onde et en ordonnées les valeurs de la constante de Kerr ramenées à la température de 20° toutes les fois que les indications de l'auteur le permettent.

L'examen de cette figure montre que les écarts entre les différents nombres sont de 30 pour 100; les mémoires ne permettent généralement pas de faire une discussion utile de la précision des mesures, il paraît difficile d'en déduire la valeur de cette constante à plus de 10 pour 100 près.

Conclusions et Introduction.

Il est difficile de prévoir l'avenir réservé au phénomène de Kerr; mais des travaux de ces dernières années,

on peut essayer de dégager une impression d'ensemble donnant l'orientation des recherches actuelles.

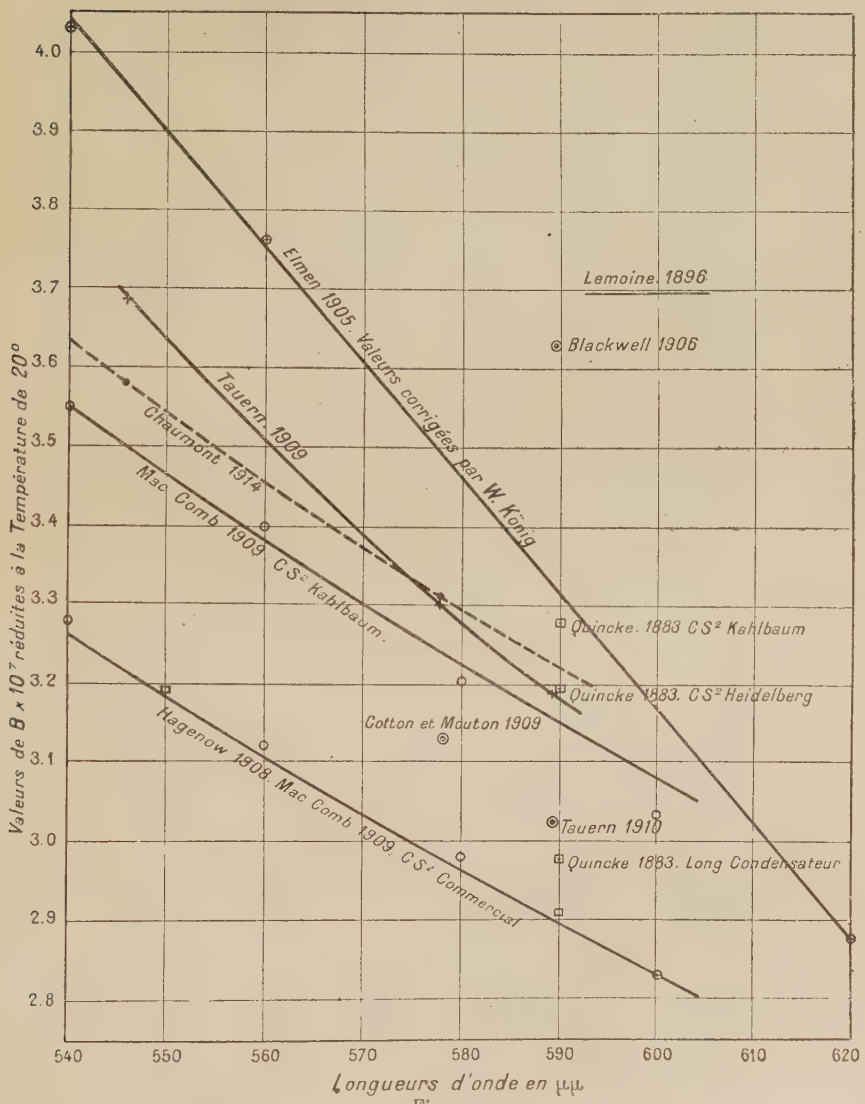

Fig. 1.

Plusieurs théories de la double réfraction électrique ont été proposées, elles partent d'hypothèses différentes et semblent conduire à des résultats opposés; dans ces conditions, l'expérience devrait facilement permettre de décider entre elles; malheureusement, dans beaucoup de cas, une étude plus approfondie montre que les phénomènes observés sont moins simples qu'ils ne paraissent au premier abord, et peuvent également s'expliquer par les différentes hypothèses.

Pour faire un choix définitif, il faut attendre que des expériences nouvelles ou des observations plus précises donnent un moyen de contrôler quantitativement d'une façon plus exacte ces diverses théories.

Au point de vue expérimental, un certain nombre de résultats paraissent acquis; par exemple : la variation avec la température de la constante de Kerr et sa dispersion; et il semble qu'il ne reste plus qu'à préciser les nombres obtenus. Dans d'autres cas, les résultats sont encore incomplets ou incertains. On connaît bien une limite supérieure de la durée d'établissement du phénomène, mais la limite inférieure n'est pas établie avec certitude. Les retards absolus n'ont pu être observés que dans un nombre très restreint de cas, et n'ont pour ainsi dire jamais été mesurés. Il reste encore beaucoup à faire sur les relations entre la double réfraction électrique et la constitution chimique. Les découvertes récentes de la biréfringence électrique des gaz et du phénomène de Stark ouvrent de nouvelles voies. Enfin, certaines recherches n'ont pas encore été entreprises ou n'ont pas donné de résultat : je citerai l'étude du phénomène de Kerr au voisinage d'une bande d'absorption et l'étude du retard absolu dans le sens du champ.

La plupart des questions soulevées par la discussion des théories sont donc bien loin d'être résolues expérimentalement et le phénomène de la double réfraction élec-

trique offre encore aux physiciens un champ de recherches très vaste.

Ce champ de recherches ne me paraît pas étudié autant qu'il faudrait; je ne pense pas qu'il faille attribuer ce fait uniquement à la difficulté de l'étude expérimentale des questions proposées. Il semble que dans l'esprit d'un assez grand nombre de physiciens, il reste quelque chose de la défiance qui a accueilli la découverte de Kerr. L'opinion est encore répandue que la double réfraction électrique des liquides n'est pas un phénomène bien défini et qu'elle dépend de conditions accessoires mal connues [1]. En particulier, il est assez généralement admis que les traces d'impuretés, en même temps qu'elles modifient la conductibilité, changent dans de notables proportions la valeur de la constante, et les divergences importantes entre les nombres obtenus par les différents expérimentateurs sembleraient confirmer cette façon de voir.

Objet de ce travail. — Ce travail a été entrepris pour chercher si le phénomène de Kerr est un phénomène bien constant et s'il est possible d'obtenir dans son étude des résultats concordants. Je montrerai que le rôle des impuretés n'a pas l'importance qu'on lui a attribuée; les écarts trouvés doivent s'expliquer par les erreurs commises dans les mesures.

Il m'a alors été possible de vérifier la loi de Kerr, et de déterminer avec exactitude la valeur de la constante. Cette détermination a exigé l'emploi de méthodes précises de mesures géométriques, électriques et optiques.

---

[1] Je citerai comme exemple les recherches de M. Giurgea (*loc. cit.*), qui prétend découvrir un phénomène de double réfraction thermique se superposant à la double réfraction électrique; l'explication (anisotropie de l'échauffement du diélectrique) n'en est pas claire et je n'ai jamais pu constater une telle action.

J'ai été ainsi amené à faire une discussion critique des méthodes employées pour l'étude des vibrations elliptiques. Étant donnée l'extension qu'a prise ce travail, je le présente d'une façon indépendante dans la première Partie.

La seconde Partie a plus directement rapport au phénomène de Kerr; elle est divisée en deux Chapitres : le premier comprend l'étude du champ créé par un condensateur plan et les procédés employés pour la mesure de ce champ; dans le second se trouvent la description des expériences et l'ensemble des résultats obtenus avec le sulfure de carbone.

Ce travail a été fait au Laboratoire de Physique de l'École Normale supérieure. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. Abraham dont la bienveillance a mis à ma disposition les ressources de ce laboratoire et dont les précieux conseils m'ont souvent été très utiles. J'adresse l'hommage de ma profonde gratitude à M. Cotton qui a suivi pas à pas mes recherches et a bien voulu me diriger dans une étude où il est particulièrement compétent.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE D'UN FAISCEAU LUMINEUX POLARISÉ ELLIPTIQUEMENT.

INTRODUCTION.

La détermination du plan d'une vibration lumineuse polarisée rectilignement est à l'heure actuelle une opération facile : les polarimètres ont atteint un grand degré de perfection, résultant de l'emploi des polariseurs à champ normal et des systèmes de pénombre à sensibilité variable.

Au contraire, le problème de l'analyse précise d'une vibration elliptique semble encore difficile. La méthode consistant à ramener la vibration elliptique à être rectiligne par le passage à travers une lame biréfringente appelée *compensateur* est cependant très ancienne; dès 1840, de Senarmont [1] l'applique à l'étude de la réflexion métallique, et, en 1851, Stokes [2] construit un analyseur capable de déterminer à la fois la direction et le rapport des axes d'une vibration elliptique. Pour donner à cet appareil la sensibilité des méthodes polarimétriques modernes, il ne restait plus qu'à le doter des dispositifs qui leur ont permis d'atteindre ce degré de perfection, c'est-à-dire : les polariseurs à champ normal et les systèmes de pénombre à sensiblité variable.

Les expérimentateurs ont surtout étudié ce problème

---

(1) H. de Senarmont, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. LXXIII, p. 337.

(2) Stokes, *Phil. Mag.*, 4e série, t. II, 1851, p. 420.

dans des cas particuliers; les méthodes de Chauvin [1] et de Brace [2] donnent de bons résultats pour la mesure de l'ellipticité, lorsque l'on connaît déjà la direction des axes. Les tentatives faites jusqu'ici pour présenter une méthode générale sont peu nombreuses, et elles reposent le plus souvent sur un appareil algébrique dont la complexité apparente masque la simplicité même de la méthode expérimentale. Il est alors quelquefois difficile de reconnaître, dans ces longues équations, les qualités essentielles et distinctives des différents procédés et de faire un choix.

Le but de ce travail est d'exposer le principe des méthodes qu'on peut employer pour l'étude d'un faisceau lumineux polarisé elliptiquement; d'en faire une discussion rapide en donnant les propriétés caractéristiques de chacune d'elles, et enfin, d'arriver à la construction d'un appareil qui assure à la résolution de ce problème une facilité et une précision identiques à celles que les polarimètres donnent à la détermination de l'azimut d'une vibration rectiligne.

Les considérations suivantes peuvent être présentées sous une forme algébrique. Tuckerman [3] a indiqué un procédé de calcul élégant; mais ce calcul conduit souvent à des formules longues et il me semble préférable de faire cet exposé au moyen de la représentation géométrique de Poincaré [4]. Bien que déjà ancienne, elle est assez peu connue pour que je croie utile d'en rappeler les principaux caractères.

---

(1) Chauvin, *Journal de Physique*, 2e série, t. IX, 1890, p. 21.

(2) Brace, *Physical Review*, t. XVIII, 1903, p. 70.

(3) L.-B. Tuckerman, *University of Nebraska Studies*, Vol. IX, n° 2, 1909.

(4) H. Poincaré, *Théorie mathématique de la Lumière*, t. II, 1892, p. 275. — *Cf.* Ch. Mauguin, *Bulletin de la Société française de Minéralogie*, t. XXXIV, n° 1, janvier 1911. — J. Walker, *Philos. Mag.*, 6e série, t. III, 1902, p. 541.

CHAPITRE I.

A. — Représentation géométrique des vibrations elliptiques. Méthode de Poincaré.

Conventions de signes. — Nous rapporterons toujours une vibration elliptique à deux axes rectangulaires de son plan xOy issus du centre et orientés de telle façon que si Oz désigne la direction de propagation de la lumière, le trièdre $Oxyz$ soit dextrorsum. Cela veut dire que la rotation de 90° qui amène Ox sur Oy s'effectue de gauche à droite pour un observateur placé à l'infini dans la direction de Oz (*fig.* 2).

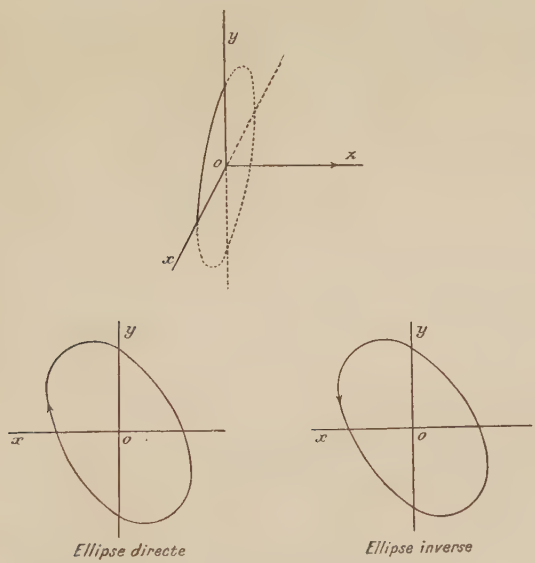

Fig. 2.

On dit qu'une ellipse est parcourue dans le sens direct lorsque le mobile qui la décrit se meut dans l'angle xOy

de Ox vers Oy. On dit qu'une vibration elliptique est droite lorsque l'observateur qui reçoit la lumière voit tourner le mobile représentatif dans le sens des aiguilles d'une montre. Avec le choix des axes fait plus haut, une ellipse directe est droite, une ellipse inverse est gauche et nous ne risquerons pas d'introduire de confusion entre ces deux expressions.

De même une substance douée de pouvoir rotatoire fait tourner le plan de polarisation de la lumière dans le sens direct si elle est droite, dans le sens inverse si elle est gauche : ces rotations sont donc positives pour les substances droites et négatives pour les substances gauches.

Représentation plane. — Les équations du mouvement du mobile qui représente une vibration elliptique peuvent toujours se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\cos(\omega t - \varphi), \\ y = b\cos(\omega t - \varphi - \theta). \end{cases}$$

et cela d'une seule façon si l'on s'astreint à prendre les longueurs a et b positives et les angles φ et θ compris entre 0 et 2π.

Dans la considération d'une telle vibration, si l'on néglige sa grandeur, sa période et sa phase, elle reste caractérisée par sa forme, son orientation et son sens de parcours, c'est-à-dire par le rapport $\frac{b}{a}$ et l'angle θ. Il existe donc une correspondance univoque entre les vibrations elliptiques considérées uniquement de ce point de vue, et les nombres imaginaires $u + iv$ de module $\frac{b}{a}$, d'argument θ; et nous représenterons la vibration (1) par l'affixe du nombre correspondant, c'est-à-dire par le point de coordonnées

$$(2) \qquad u = \frac{b}{a}\cos\theta, \qquad v = \frac{b}{a}\sin\theta.$$

Les équations (1) peuvent s'écrire en posant $T = \omega t - \varphi$, développant $\cos(T - \theta)$ et tenant compte des relations (2)

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a \cos T, \\ y = a u \cos T + a v \sin T. \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit de suite en considérant les positions du mobile pour les valeurs $T = 0$ et $T = \varepsilon$ que l'ellipse est droite si $v > 0$, gauche si $v < 0$. Le grand axe de l'ellipse est dans l'angle aigu des diamètres conjugués $y = ux$ et $x = 0$; il est donc dans l'angle xOy si $u > 0$ et dans l'angle yOx' si $u < 0$.

L'élimination de T entre les relations (3) donne l'équation de l'ellipse décrite :

$$(4) \qquad (y - ux)^2 + v^2 x^2 = a^2 v^2.$$

Les asymptotes de cette ellipse ont pour coefficients angulaires $u + iv$ et $u - iv$; la méthode précédente revient à représenter toutes les ellipses homothétiques par l'affixe du coefficient angulaire de l'une de leurs asymptotes.

L'équation (4) montre que le point $(u_0, 0)$ de l'axe réel représente la droite $y - u_0 x = 0$; c'est une vibration rectiligne faisant avec Ox l'angle α tel que $\operatorname{tang} \alpha = u_0$; le point $(0, v_0)$ de l'axe des imaginaires pures représente l'ellipse $y^2 + v_0^2 x^2 = a^2 v_0^2$; ses axes sont dirigés suivant Ox et Oy et le rapport de leurs longueurs $\frac{B}{A} = |v_0|$. Les deux points (u_0, v_0) et $(u_0, -v_0)$, symétriques par rapport à l'axe Ou, représentent deux vibrations qui décrivent la même ellipse, mais en tournant en sens inverse. En particulier, les deux points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ représentent les deux vibrations circulaires droite et gauche.

Cherchons le lieu des points représentant les ellipses dont les axes font l'angle α avec les axes de coordonnées xOy; il suffit d'exprimer que les asymptotes de l'ellipse

représentée par le point (u, v) sont conjuguées harmoniques des directions choisies pour les axes; on obtient :

$$u^2 + v^2 + \frac{2}{\operatorname{tang} 2\alpha} u - 1 = 0;$$

le lieu cherché est un cercle appartenant au faisceau qui a pour points doubles les deux points $(0, 1)$ $(0, -1)$ représentant les vibrations circulaires. Ces deux points coupent le cercle en deux arcs : pour l'un d'eux $u > 0$, le grand axe de l'ellipse fait l'angle $\alpha < 90^\circ$ avec Ox; pour l'autre $u < 0$, c'est le petit axe qui fait avec Ox l'angle $\alpha < 90^\circ$.

Cherchons de même le lieu des points représentant des ellipses d'ellipticité β, c'est-à-dire telles que le rapport des axes $\frac{B}{A} = \operatorname{tang} \beta$; elles sont semblables à l'ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$; pour exprimer cette similitude, il suffit d'écrire que l'angle des asymptotes est le même : en égalant les valeurs des tangentes des angles qu'elles forment, on a la condition

$$u^2 + v^2 \pm \frac{2}{\sin 2\beta} v + 1 = 0.$$

Le lieu est formé de deux cercles symétriques par rapport à l'axe des u et ne coupant pas cet axe; l'un représente donc des vibrations droites et l'autre des vibrations gauches. Ces cercles appartiennent à un faisceau à points doubles imaginaires, le rayon $R = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\beta} - 1}$ est toujours réel, et les points limites obtenus pour $\sin 2\beta = \pm 1$ sont les deux points $(0, 1)$ $(0, -1)$ représentant les vibrations circulaires. Ces points limites étant les points doubles du faisceau précédent, les deux faisceaux sont orthogonaux.

Représentation sphérique. — Prenons une sphère de diamètre égal à l'unité (*fig.* 3), et orientons-là, c'est-à-dire

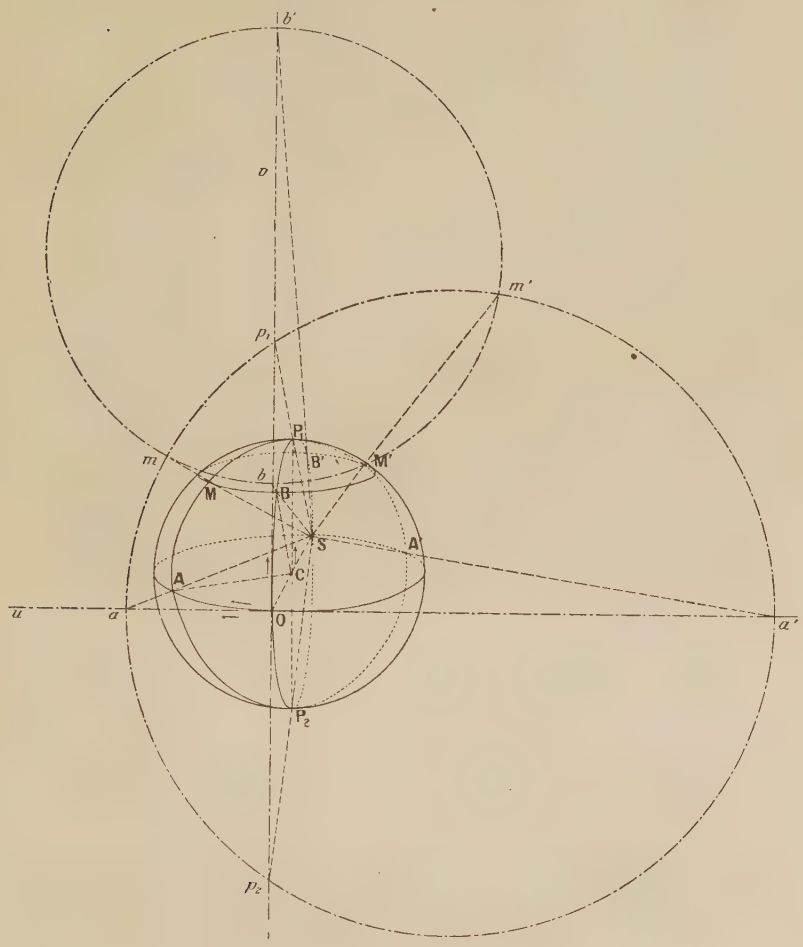

Fig. 3.

marquons l'équateur et deux pôles; nous affectons l'un de ces pôles P_1 du signe $+$, l'autre P_2 du signe $-$; sur l'équateur, nous choisissons une origine des méridiens

et un sens de parcours tel qu'un observateur placé au pôle positif P_1 voit croître la longitude dans le sens des aiguilles d'une montre. Un point de la sphère sera alors défini sans équivoque par sa latitude comptée de -90° à $+90^\circ$ et sa longitude prise de 0° à 360°.

Sur cette sphère, nous plaçons le plan uOv tangent en O à l'origine des méridiens, de façon que la droite Ou soit tangente à l'équateur, les directions positives étant les mêmes, et que l'axe Ov soit parallèle à la ligne des pôles P_2P_1 et de même sens. Il nous est maintenant possible de représenter une vibration elliptique par le point M de la sphère dont la projection stéréographique m est le point représentatif de la vibration dans le plan uOv.

Le diamètre de la sphère étant égal à l'unité, les points $p_1(0, 1)$ et $p_2(0, -1)$ représentant les vibrations circulaires se projettent suivant les deux pôles P_1 et P_2 et, par suite, le faisceau des cercles passant par p_1 et p_2 se projette suivant les méridiens et le faisceau orthogonal suivant les parallèles. Il en résulte que l'orientation des axes d'une ellipse sera définie uniquement par la longitude du point représentatif M, l'ellipticité par sa latitude, et l'étude de la représentation sphérique sera complète lorsque nous aurons vu ce que représentent les points de l'équateur et ceux du méridien origine.

L'équateur est la projection de l'axe des u; le point A, projection de a, représente une vibration rectiligne faisant avec Ox un angle α tel que $Oa = tg\,\alpha$, donc $\alpha = \widehat{OSA} = \frac{\widehat{OCA}}{2}$. Le méridien origine est la projection de l'axe des v; le point B, projection de b, représente donc une ellipse d'axes xOy, le rapport des axes $\frac{B}{A} = \operatorname{tang}\beta = |Ob|$, donc $\beta = \widehat{OSb} = \frac{\widehat{OCB}}{2}$. Au total : *Un point M de longitude* 2α *comptée de* 0° *à* 360° *et de latitude* 2β *comptée de* -90°

à $+90^\circ$ *représente une ellipse dont le grand axe fait un angle* α *avec* Ox *et d'ellipticité* $|\beta|$, *le signe de* β *indiquant le sens du parcours.*

Cette représentation sphérique présente sur la représentation dans le plan des uv, l'avantage d'être indépendante des axes xOy, auxquels on rapporte les vibrations elliptiques; une rotation des axes xOy se traduit simplement par une rotation d'un angle double du méridien choisi comme origine. On peut d'ailleurs déduire facilement de la figure sphérique la représentation plane rapportée à des axes xOy quelconques; il suffit de faire la projection stéréographique de la sphère sur le plan tangent au point de l'équateur représentant la vibration rectiligne Ox.

Applications. — L'emploi simultané de ces deux modes de représentation permet de traiter très rapidement la majorité des problèmes relatifs aux vibrations elliptiques; donnons-en quelques exemples pour nous familiariser avec la méthode :

I. Soit à décomposer une vibration elliptique E (*fig.* 4) en deux vibrations rectilignes rectangulaires A et B.

Projetons la sphère sur le plan tangent en A; e est le point représentatif de la vibration dans ce plan uAv; par suite : 1° le rapport des amplitudes des deux vibrations B et A est $\frac{b}{a} = \mathrm{A}e$; 2° la composante B présente sur A un retard de phase égal à l'angle θ de Ae avec Au.

II. Plaçons sur le trajet du faisceau propageant E, un nicol arrêtant A et laissant passer la vibration rectangulaire B, on vient de voir que $\frac{b}{a} = \mathrm{A}e = \frac{\mathrm{A}e}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EB}}$, car AB $= 1$ et les deux triangles BAe et BEA rectangles en A et E sont semblables. Si l'intensité lumineuse de E est prise comme unité les amplitudes de A et B seront précisément EB et EA, car $\overline{\mathrm{EA}}^2 + \overline{\mathrm{EB}}^2 = 1$; l'intensité

lumineuse de la vibration traversant l'analyseur sera donc $\overline{EA}^2$.

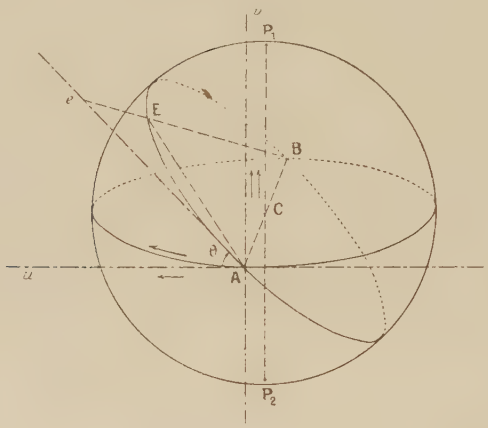

Fig. 4.

III. Supposons qu'on dispose sur le trajet de la vibration E une lame biréfringente d'épaisseur l, normale à la direction de propagation du faisceau lumineux. Si A et B représentent les directions des lignes neutres de cette lame, n_a, n_b les indices correspondants, les composantes principales de la vibration incidente

$$x = a\cos(\omega t - \varphi), \qquad y = b\cos(\omega t - \varphi - \theta)$$

se propagent dans la lame avec des vitesses différentes et deviennent à la sortie

$$x = a\cos\left(\omega t - \varphi - 2\pi\frac{n_a l}{\lambda}\right), \quad y = b\cos\left(\omega t - \varphi - \theta - 2\pi\frac{n_b l}{\lambda}\right);$$

les amplitudes n'ont pas changé, mais le retard de phase de y sur x est devenu $\theta_1 = \theta + 2\pi\frac{(n_b - n_a)l}{\lambda}$: le point représentatif e_1 de la vibration sortante se déduira de e par une rotation de $2\pi\frac{(n_b - n_a)l}{\lambda}$ effectuée autour de A et sur la sphère le point E_1 se déduira de E par la même

rotation effectuée autour du diamètre AB (cette rotation sera comptée positivement dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé en A).

IV. Si la vibration elliptique E traverse une lame douée du pouvoir rotatoire, on sait que l'ellipse n'est pas altérée dans sa forme, mais que ses axes tournent d'un angle ρl (ρ étant le pouvoir rotatoire de la substance et l la longueur traversée). La latitude du point représentatif reste la même, sa longitude augmente de $2\rho l$. Le nouveau point E_1 se déduit de E par cette rotation autour de la ligne des pôles, ou plus exactement par une rotation autour du pôle positif P_1 mesurée en valeur algébrique par $2\rho l$.

L'avantage de la méthode de Poincaré est de traduire l'effet d'une lame biréfringente ou douée de pouvoir rotatoire par une construction géométrique indépendante de l'état de polarisation du faisceau elliptique qui traverse ces lames.

B. — Position du problème. Sa décomposition en deux parties distinctes.

Le problème de l'analyse d'une vibration elliptique que nous nous proposons ici a pour but de déterminer l'orientation, le rapport des axes et le sens de parcours de l'ellipse représentant la vibration lumineuse; cela revient à fixer la position du point représentatif sur la sphère [1].

---

[1] Nous supposons implicitement que tous les rayons du faisceau lumineux ont le même état de polarisation et que cet état est donné. Par suite, nous laissons de côté, dans cette étude, des appareils comme le polarimètre de Laurent, où *avant* le milieu que l'on étudie par son action sur la lumière polarisée, il existe déjà deux faisceaux dont l'état de polarisation n'est pas identique; mais nous étudierons l'appareil modifié où la lame demi-onde est fixée à l'analyseur. Cet appareil modifié rend les mêmes services, et a en outre l'avantage qu'on n'a à supposer aucune condition restrictive pour le phénomène étudié. Par exemple, lorsque la lame demi-onde est fixée à l'analyseur, on pourrait étudier les propriétés d'un milieu dont le pouvoir rotatoire dépendrait de l'azimut de la vibration incidente.

Une radiation lumineuse n'agit sur l'œil que par son intensité et sa couleur, son état de polarisation n'est pas directement accessible à nos sens; aussi le problème précédent ne peut être résolu qu'en recevant le faisceau lumineux sur un appareil appelé *analyseur* qui accuse cet état de polarisation.

L'existence d'un tel appareil se conçoit aisément, si l'on connaît le moyen d'obtenir des systèmes dichroïques, c'est-à-dire qui laissent passer du faisceau incident une fraction dépendant de son état de polarisation. Or, on sait qu'il existe des corps naturellement dichroïques, et, d'un autre côté les nicols (1) sont des appareils parfaitement dichroïques, puisqu'ils arrêtent entièrement une composante rectiligne de la lumière incidente et laissent passer la composante rectangulaire sans absorption notable. Un ensemble plus ou moins complexe de lames cristallines et de nicols pourra donc servir à reconnaître l'état de polarisation du faisceau incident par l'observation de la lumière transmise.

Supposons un analyseur constitué de telle façon que le faisceau lumineux traverse toujours un premier nicol qui n'est précédé que de lames biréfringentes ou douées de pouvoir rotatoire, et est suivi de n'importe quoi : polariseurs, lames biréfringentes, lames dichroïques, etc (2).

Ce premier nicol N arrête une vibration rectiligne représentée par le point R de la sphère et laisse passer la vibration R′ diamétralement opposée. Soit X le point

---

(1) Pour faciliter l'exposition, nous désignerons dans tout ce Chapitre par le mot *nicol*, un prisme polarisant quelconque, et il est bien entendu que cette désignation n'exclut pas les polariseurs à champ normal qui, au contraire, sont préférables aux prismes de Nicol et de Foucault.

(2) Cette restriction revient à utiliser uniquement le dichroïsme des nicols; nous verrons plus loin que tous les appareils usuels sont dans ce cas qui, d'ailleurs, est le plus avantageux.

représentatif de la vibration elliptique d'intensité I_0, reçue sur l'analyseur; par le passage des lames précédant N elle est transformée en une vibration Y et, à la sortie de ce prisme, l'intensité lumineuse du faisceau est $k_1 \overline{RY}^2 I_0$, k_1 étant un coefficient inférieur à l'unité dû à l'absorption par N et les lames qui le précèdent. Par suite de la restriction faite (ces lames ne sont pas dichroïques), le coefficient k_1 est indépendant de la vibration incidente X, et Y se déduit de x par une rotation sur la sphère qu'on peut obtenir en composant les rotations finies qui traduisent l'action de chacune de ces lames biréfringentes ou douées de pouvoir rotatoire [1].

Désignons par E, E′ les deux vibrations elliptiques transformées en R, R′ par l'action de ces lames précédant N; les points R, R′ se déduisent de E, E′ par cette même rotation résultante qui amène X en Y; les deux figures XEE′ et YRR′ sont donc égales; EE′ est un diamètre de la sphère et RY = EX. L'intensité du faisceau sortant de N est, par suite, $k_1 \overline{EX}^2 I_0$. Son état de polarisation est parfaitement défini, il est représenté par la vibration rectiligne R′. Tous les appareils (lames ou nicols) placés à la suite de N auront pour effet de modifier cette vibration d'une façon indépendante de la vibration initiale X; en particulier, son intensité sera diminuée dans un rapport constant k_2.

En posant $k = k_1 k_2$ on peut dire que l'effet de l'analyseur sur le faisceau lumineux est de décomposer la vibration incidente X *d'intensité* I_0 *en deux vibrations elliptiques diamétralement opposées d'intensités* $\overline{E'X}^2 I_0$ *et* $\overline{EX}^2 I_0$; *la première* E *est arrêtée, l'autre* E′ *traverse l'analyseur, mais son état de polarisation est modifié et son intensité est réduite dans le rapport k, de sorte que l'intensité observée*

---

[1] *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, Note V, p. 433.

est

$$I = k\,\overline{EX}^2\,I_0.$$

La position de E *et la valeur de* k *sont caractéristiques de l'analyseur et ne dépendent pas de la vibration particulière* X *qu'il reçoit; nous appellerons* E *la « vibration arrêtée » et* k *le « coefficient de transmission »* (1).

Jusqu'ici, nous avons supposé que l'action de l'analyseur était la même sur la totalité du faisceau incident; il n'en est pas nécessairement ainsi, et nous sommes obligés de décomposer ce dernier en un nombre fini ou même une infinité de faisceaux élémentaires, afin de pouvoir considérer chacun d'eux comme affecté d'une façon unique par l'analyseur (2). Nous venons de voir que cette action est caractérisée par une vibration arrêtée et un coefficient de transmission; l'action totale d'un analyseur sur un faisceau lumineux sera donc définie par un ensemble de

---

(1) Les extrémités d'un même diamètre de la sphère représentent deux vibrations elliptiques conjuguées; le rapport des axes est le même pour les deux ellipses, mais le grand axe de l'une coïncide avec le petit axe de l'autre, et elles sont parcourues en sens inverses. De telles vibrations sont souvent importantes à considérer; dans l'analyse précédente, on a implicitement démontré les résultats connus suivants :

1° Une vibration elliptique X d'intensité I_0 peut toujours se décomposer en deux vibrations conjuguées quelconques E, E′ et les intensités de ces deux vibrations sont $\overline{E'X}^2\,I_0$ et $\overline{EX}^2\,I_0$.

2° Une pile de lames biréfringentes ou douées de pouvoir rotatoire n'altère pas deux vibrations elliptiques conjuguées (vibrations privilégiées) représentées par les extrémités du diamètre autour duquel s'effectue la rotation résultante qui traduit l'action de cette pile de lames.

(2) Dans le polarimètre de Laurent, il faut considérer deux faisceaux élémentaires; l'un traversant la lame demi-onde et l'autre passant à côté; pour la mesure d'une ellipticité par le compensateur de Babinet, on doit en considérer une infinité, puisque l'épaisseur du compensateur varie régulièrement d'un point à l'autre.

points sur la sphère E' E'' E'''..., et de nombres inférieurs à l'unité k' k'' k'''.... Connaissant les intensités I'_0 I''_0 I'''_0... des faisceaux élémentaires incidents et leur état de polarisation X, ces quantités permettront de calculer les intensités observées à la sortie de l'analyseur.

Cet appareil sera propre à repérer une vibration elliptique A, si l'ensemble I' I'' I'''... des valeurs que prennent ces intensités, lorsque la vibration incidente est représentée par le point A, est caractéristique de cette vibration particulière; mais, pour qu'il puisse servir à déterminer une vibration incidente quelconque X, il faut de plus qu'il soit déformable, de telle sorte que la vibration caractérisée A puisse être amenée en coïncidence avec X et que la mesure de ses déformations donne un moyen de calculer les coordonnées sphériques du point A.

Soient :

$$\begin{array}{llllllll} E'_1, & E''_1, & E'''_1, & \ldots, & k', & k'', & k''', & \ldots, \\ E'_2, & E''_2, & E'''_2, & \ldots, & k', & k'', & k''', & \ldots, \end{array}$$

deux états d'un tel analyseur que nous supposons déduits l'un de l'autre en déplaçant sur la sphère un ensemble invariablement lié de points E', E'', E''',... sans changer les coefficients k', k'', k''', ...

Supposons de plus que, dans le premier cas, l'ensemble I' I'' I'''... des intensités soit caractéristique d'une vibration incidente A_1 et que l'observation permette facilement de la distinguer de toutes ses voisines; il est bien évident que, dans le second cas, ces mêmes intensités seront caractéristiques de la vibration A_2 déduite de A_1 par le déplacement d'un point A lié au système rigide des points E', E'', E''',..., et l'observation permettra de distinguer avec les mêmes apparences la vibration A_2 de toutes ses voisines. En particulier, si le premier état de cet analyseur est le meilleur pour reconnaître la

vibration A_1, le second sera le meilleur pour reconnaître la vibration A_2.

Il résulte de là que la recherche d'un analyseur pour l'étude des vibrations elliptiques se sépare en deux problèmes distincts :

1° *Recherche d'un ensemble de points* E *et de coefficients* k *définissant le mieux possible une vibration* A. *Nous appellerons « système de plages » les appareils produisant un tel ensemble.*

2° *Recherche des modifications de l'analyseur capables de déplacer sur la sphère l'ensemble des points* E *sans changer les coefficients* k *et de mesurer les déplacements correspondants du point* A. *Nous appellerons « système compensateur » le dispositif assumant ce rôle.*

Il en résulte aussi que l'erreur commise dans l'analyse d'une vibration elliptique se décompose en deux erreurs de natures différentes :

1° *L'erreur de pointé qui tient à ce que la vibration* X *à analyser et la vibration* A *définie par l'analyseur ne sont pas rigoureusement identiques*;

2° *L'erreur provenant de ce que la vibration caractéristique* A *n'est pas elle-même connue avec une entière exactitude.*

Le raisonnement précédent montre que, quelle que soit la vibration particulière à analyser, la première de ces erreurs, évaluée par la distance AX *sur la sphère, sera la même. La seconde de ces erreurs provient d'une connaissance imparfaite de l'analyseur; on peut donc espérer la rendre inférieure à la première avec un appareil bien étudié. Si ce résultat est obtenu, toutes les vibrations elliptiques pourront être mesurées avec la même erreur évaluée en distance sur la sphère représentative.*

CHAPITRE II.

Nous ferons dans ce Chapitre une étude comparée des différents systèmes de plages, et nous étudierons le rôle du système compensateur.

Cette discussion sera limitée au cas de l'observation visuelle; pour préciser les conditions de ce mode d'observation, nous commencerons par rappeler quelques propriétés des rayons lumineux.

A. — Définition du faisceau incident et conditions de l'observation.

« *Étendue* » *d'un faisceau lumineux.* — Considérons un faisceau lumineux monochromatique qui se propage dans un milieu isotrope non homogène.

Un rayon de ce faisceau est déterminé par deux de ses points AA′; d'après le théorème de Fermat, c'est le chemin pour lequel l'intégrale $\int_A^{A'} ndl$ prend la plus petite valeur. Si donc on se donne un milieu par la valeur de l'indice en chaque point, les rayons qui peuvent se propager dans ce milieu dépendent de quatre paramètres. En particulier, on peut définir l'un d'eux par le point A où il rencontre une surface S et la parallèle OT à sa tangente en ce point menée par une origine arbitraire O.

Considérons tous les rayons qui rencontrent S en un point d'une petite surface dS entourant A, et tels que la parallèle à la tangente en ce point menée par O soit comprise à l'intérieur d'un angle solide, infiniment petit $d\omega$ comprenant OT.

Nous appellerons étendue du faisceau élémentaire constitué par tous ces rayons la quantité

$$dE = n^2 \cos\theta \, d\omega \, ds,$$

où n désigne l'indice en A et θ l'angle de OT avec la normale à dS.

Un faisceau lumineux pourra toujours être décomposé en éléments infiniment petits analogues au précédent; nous appellerons *étendue* de ce faisceau la somme des étendues de ses éléments.

L'importance de cette quantité résulte du théorème suivant : *L'étendue d'un faisceau lumineux est indépendante de la surface particulière* S *qui sert à le décomposer en faisceaux élémentaires.*

Ce théorème est équivalent au théorème de Straubel [1]; il est facile de le démontrer directement d'une façon élémentaire dans le cas de milieux homogènes, séparés par des surfaces réfléchissantes ou réfringentes, enfin il résulte d'une analyse mathématique faite récemment par Dontot [2].

Remarque I. — Le théorème de Straubel subsiste et par suite l'étendue d'un faisceau lumineux se conserve lorsque celui-ci passe d'un milieu isotrope dans un autre milieu isotrope en traversant des corps cristallisés.

Remarque II. — L'étendue d'un faisceau issu d'un point est nulle, puisque la section de tous les éléments du faisceau par une surface plane passant par ce point est nulle; on sait d'ailleurs qu'un tel faisceau ne peut avoir une existence propre, car une source réelle a toujours une surface finie.

« *Éclat* » *d'un faisceau élémentaire.* — Considérons un faisceau élémentaire d'étendue dE. Coupons-le par une surface S, on appelle *flux lumineux à travers cette surface,* la quantité d'énergie qui la traverse pendant l'unité de temps; désignons-le par $d\Phi$.

---

[1] Straubel, *Physikalische Zeitschrift*, t. IV, oct. 1902, p. 114.
[2] Dontot, *Diplôme d'études supérieures*, Paris, 1914.

Nous appellerons « éclat » du faisceau au point où il rencontre S *le quotient*

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dE}$$

Si l'on suppose que ce faisceau élémentaire fait partie d'un faisceau assez grand pour que les phénomènes de diffraction soient négligeables et qu'il n'y a pas de perte de lumière dans la propagation soit par absorption, soit par diffusion, soit par réflexion, le flux $d\Phi$ transporté par le faisceau reste constant et il en est de même de son éclat ε. Avec ces hypothèses, l'éclat d'un *rayon* lumineux, c'est-à-dire d'un faisceau infiniment petit, est une quantité constante, mais elle peut varier d'un rayon à l'autre.

Pour déterminer un faisceau lumineux, il faudra se donner le domaine qui le limite, c'est-à-dire le domaine dans lequel peuvent varier les quatre paramètres qui définissent un des rayons du faisceau et la valeur de l'éclat en chaque point de ce domaine. Si l'on suppose que la source de lumière est un corps noir cet éclat est le même pour tous les points et toutes les directions; par suite, tous les rayons du faisceau ont le même éclat [1].

---

[1] Ces notions d'étendue et d'éclat d'un faisceau lumineux peuvent servir à préciser les définitions des grandeurs photométriques.

L'éclat d'un point d'une source dans une direction est l'éclat du faisceau élémentaire émis par ce point dans cette direction. Cette définition se ramène à celle qui est habituellement adoptée si la source est dans un milieu d'indice égal à l'unité; elle doit être prise de préférence à la définition ordinaire, car l'éclat d'une source, comme nous venons de le définir, est caractéristique de cette source et ne dépend pas du milieu dans lequel elle se trouve. La quantité de lumière reçue par une surface dans l'unité de temps (flux lumineux) est égale au produit de l'étendue du faisceau qui l'éclaire par l'éclat de ce faisceau, $\Phi = E\varepsilon$; si l'éclat n'est pas uniforme, $\Phi = \int_E \varepsilon\, dE$; l'éclairement moyen de cette surface est $e = \frac{\Phi}{S}$ en désignant par S la surface éclairée. Ces définitions sont équivalentes à celles qu'on donne généralement.

Définition du faisceau incident. — Le faisceau lumineux reçu par l'analyseur sera défini :

1° Par la longueur d'onde dans le vide λ_0 de la vibration supposée monochromatique qui le constitue;

2° Par son état de polarisation, nous admettrons qu'il est unique et représenté par un point X de la sphère;

3° Par son éclat ε_0 que nous supposerons constant pour tous les rayons;

4° Par son domaine; nous limiterons ce faisceau par deux diaphragmes S et S′ dont l'un peut être rejeté à l'infini. Si ces diaphragmes sont dans un même milieu d'indice n et petits par rapport à leur distance d, l'étendue du faisceau incident est $E = n^2 \frac{SS'}{d^2}$.

Conditions de l'observation visuelle. — Nous avons déjà vu que, pour étudier l'action d'un analyseur, il est nécessaire de décomposer le faisceau incident en parties telles que sur chacune d'elles cette action soit uniforme.

La décomposition la plus complète s'obtient en divisant le domaine total de ce faisceau en domaines infiniment petits, par un procédé quelconque; il est bien évident que, chacun des faisceaux élémentaires ainsi obtenus se réduisant à un rayon lumineux, l'action de l'analyseur sur l'un d'eux sera unique; mais leur nombre est trop grand pour qu'ils puissent tous être distingués par une image rétinienne, et il est nécessaire de le réduire à une double infinité afin de rendre l'observation possible.

Ce résultat est généralement obtenu en plaçant l'un des diaphragmes S sur l'analyseur [1] et limitant le faisceau

---

[1] Cette condition est obligatoire si l'analyseur n'a pas une action identique sur deux rayons parallèles. Ceci se produit lorsque des nicols ou des lames cristallines n'ont pas une épaisseur constante ou ne recouvrent pas la totalité du champ. Il faut alors que les lignes de séparation se trouvent dans le plan du diaphragme S.

incident à des rayons assez peu inclinés sur une direction moyenne. La valeur limite des angles qu'ils font avec l'axe du faisceau sera imposée par la nature de l'analyseur de telle sorte que l'action de ce dernier soit pratiquement la même pour tous les rayons qui passent par un même point de S.

Tous les rayons satisfaisant à cette condition de parallélisme rencontrent un cercle à l'infini; on devrait donc choisir ce cercle pour second diaphragme S′; mais il arrive souvent que le phénomène étudié nécessite l'emploi d'un faisceau lumineux assez étroit : on placera le diaphragme S′ dans la région ainsi rétrécie du faisceau, et on le choisira tel que la condition de parallélisme se trouve satisfaite.

Supposons les diaphragmes S et S′ formés par deux cercles perpendiculaires à l'axe du faisceau; désignons leurs rayons par r et r' et par d la distance SS′.

On a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{r}{d} + \frac{r'}{d}.$$

Il suffit que le diamètre apparent $\frac{2r'}{d}$ de S′ vu de S soit petit pour que l'action de l'analyseur soit la même sur tous les rayons passant par un même point de S. La condition de parallélisme (α petit) signifie de plus que si deux de ces faisceaux, passant par deux points différents de l'analyseur, traversent les mêmes lames cristallines avec les mêmes épaisseurs et rencontrent les mêmes nicols, ces faisceaux seront modifiés de la même façon par l'analyseur; elle nécessite en outre que le diamètre apparent $\frac{2r}{d}$ de S vu de S′ soit petit. Dans le cas ou S′ est à l'infini, ce dernier diamètre apparent est nul, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{r'}{d}$, et les deux conditions précédentes sont équivalentes.

Lorsque la condition de parallélisme est satisfaite,

l'action de l'analyseur sur le faisceau lumineux ne dépend plus que de l'analyseur; pour chaque point de ce dernier, elle est définie par une vibration arrêtée E et un coefficient de transmission k, et l'on peut dire que l'éclat du faisceau élémentaire qui a traversé l'analyseur par le *point* Ek est $\varepsilon_0 k \overline{\mathrm{EX}}^2$.

L'observation est alors possible en regardant avec une lunette le diaphragme S. Désignons par $S_1 S'_1$ les images de S et S′ données par la lunette d'observation, par $r_1 r'_1$ leurs rayons, d_1 leurs distance, et de même par $S_2 S'_2$ les images de ces mêmes diaphragmes obtenues dans le milieu de l'œil d'indice n, par $r_2 r'_2$ leurs rayons, d_2 leur distance. L'étendue du faisceau élémentaire qui forme l'image rétinienne dS_2 d'une portion dS de l'analyseur est $n^2 \omega\, dS_2$, en désignant par ω son angle solide. Son éclat est

$$\varepsilon = \varepsilon_0 k_0 k \overline{\mathrm{EX}}^2,$$

k_0 étant le coefficient dû à l'absorption du système d'observation (lunette et œil). Par suite, l'éclairement de cette partie de l'image rétinienne est

$$e = \varepsilon_0 k_0 k \overline{\mathrm{EX}}^2 n^2 \omega.$$

L'angle solide ω est constant pour tous les points de S_2 dans les deux cas suivants :

1° Lorsque la lunette d'observation et l'œil ne diaphragment pas le faisceau; il est alors égal à l'angle solide sous lequel l'image S'_2 de S′ est vue de la rétine;

2° Lorsque le faisceau lumineux est tel que toute la pupille soit couverte par un champ de pleine lumière.

Pour se placer dans l'un ou l'autre de ces cas, on forme l'image S'_2 sur la pupille et l'on prend une lunette d'observation suffisante pour n'arrêter aucun des rayons lumineux. L'angle ω est alors constant pour tous les points

de l'image rétinienne et il est au plus égal à l'angle solide Ω sous lequel on voit la pupille du fond de l'œil.

Posons $e_0 = \varepsilon_0 k_0 n^2 \omega$; e_0 serait l'éclairement de l'image rétinienne si l'on supprimait l'analyseur sans rien changer à la marche géométrique des rayons lumineux et aux conditions de diaphragmation.

On a

$$e = e_0 k \overline{\mathrm{EX}}^2.$$

La position de E et la valeur de k peuvent varier d'une façon continue, lorsque dS décrit la surface S ou d'une façon discontinue, S étant divisé en un nombre fini de secteurs tels que pour chacun d'eux l'action de l'analyseur soit uniforme. Suivant la composition de l'analyseur, l'observateur apercevra des franges ou des plages d'éclat uniforme et l'aspect observé changera en même temps que l'état de polarisation X de la lumière à analyser.

Le pointé se fait en observant cet aspect; nous verrons plus loin que la sensibilité peut être rendue proportionnelle à $\sqrt{e_0}$, il y a donc intérêt à prendre ω le plus grand possible; l'image S'_2 devra recouvrir la pupille, mais il est inutile qu'elle soit plus grande; le cercle oculaire S'_1 qui est pratiquement confondu avec S'_2 aura au plus la grandeur de la pupille, c'est-à-dire environ 5^{mm} de diamètre.

D'autre part, il est inutile d'augmenter beaucoup la grandeur de l'image S_2, car la rétine n'est sensible que sur une très petite surface (tache jaune), et nous ne voyons bien en même temps que des points très rapprochés. Cette image a une grandeur convenable lorsque le diamètre apparent $\frac{2r_1}{d_1}$ sous lequel on voit S_1 est de 1° (diamètre double de celui de la Lune).

L'observation visuelle conduit à choisir par ces deux conditions la position et la grandeur des images S_1 et S'_1;

il en résulte une relation pour les diaphragmes S et S′ qui déterminent le parallélisme.

On a en effet les égalités

$$\frac{SS'}{d^2} = \frac{S_1 S'_1}{d_1^2} = n^2 \frac{S_2 S'_2}{d_2^2}$$

qui expriment la conservation de l'étendue du faisceau lumineux.

La première donne

$$\frac{rr'}{d} = \frac{r_1 r'_1}{d_1};$$

nous venons de voir que, dans le cas de l'observation visuelle, il est inutile de prendre pour r'_1 et $\frac{r_1}{d_1}$ des valeurs supérieures à $2^{mm},5$ et à tang 30′. On a donc

$$\frac{rr'}{d} = 2^{mm},5 \operatorname{tang} 30',$$

et il reste à déterminer la position et la grandeur des diaphragmes satisfaisant à cette relation de façon à obtenir le meilleur parallélisme possible.

L'angle $\alpha = \frac{r'}{d} + \frac{r}{d}$ est la somme de deux termes, le second est nul dans le cas le plus favorable où S′ est rejeté à l'infini, le premier $\frac{r'}{d} = \frac{2^{mm},5}{r} \operatorname{tang} 30'$; nous sommes ainsi amenés à prendre un analyseur aussi gros que possible. Ceci a en outre l'avantage de réaliser un grossissement des plages $\frac{1}{r} \cdot \frac{r_1}{d_1}$ d'autant plus faible que r est plus grand et par suite de rendre moins perceptibles les bavures qui se produisent toujours sur les lignes de séparation. Par contre, il est difficile d'obtenir des lames cristallines bien homogènes et d'épaisseur régulière sur une large étendue; on ne peut donc songer à utiliser un analyseur de trop grande surface; un diamètre $2r = 1^{cm}$

est cependant tout à fait ordinaire et facilement réalisable. Dans ces conditions, on a

$$\frac{r'}{d} = \tang 15'.$$

D'un autre côté, je crois qu'il est nuisible de chercher à réduire au delà de cette valeur le diamètre apparent de S′ vu de S, car la visibilité des lignes de séparation augmente beaucoup, par suite des phénomènes de diffraction, lorsqu'on diminue trop l'angle solide des faisceaux élémentaires qui éclairent les différents points de l'analyseur.

Si l'on n'est pas gêné par le phénomène étudié, on pourra prendre S′ à l'infini et avec les conditions précédentes, on a

$$\tang \alpha = \frac{r'}{d} = \tang 15',$$

le faisceau incident aura le parallélisme d'un faisceau solaire.

Si nous admettons que le second diaphragme S′ ne peut pas être supérieur à 1^{cm}, $r' = 0{,}5^{cm}$, on prendra

$$d = \frac{r'}{\tang 15'} = \frac{0{,}5}{0{,}0044} = 114^{cm},$$

et l'on aura

$$\tang \alpha = \frac{r'}{d} + \frac{r}{d} = \tang 30'.$$

Il resterait maintenant à examiner si tous les rayons compris dans de tels cônes, passant par un point de l'analyseur, sont bien traités de la même façon par ce dernier. Nous ne ferons pas cette étude, il nous suffira d'en rappeler le résultat : dans le cas où l'on emploie des prismes de Nicol ou de Foucault, cette condition n'est pas satisfaite, et l'on peut observer une frange noire lorsqu'un faisceau traverse deux de ces prismes placés à l'extinc-

tion; mais si l'on a soin de se servir uniquement de prismes polariseurs à champ normal [1] et de lames telles que celles qu'on emploiera par la suite : quartz parallèle à l'axe ou mica clivé, lorsqu'elles sont traversées normalement par le faisceau, la condition précédente est satisfaite pour des angles α atteignant 1°, et l'on ne peut percevoir de frange noire, même avec les sources lumineuses monochromatiques les plus intenses qu'on puisse réaliser.

En résumé, les propriétés de l'œil limitent à une valeur assez faible l'étendue du faisceau pratiquement utilisable pour les pointés polarimétriques. Il en résulte qu'on peut, en général, ne rien perdre de la précision de la méthode tout en limitant le faisceau incident par deux diaphragmes S *et* S', *choisis de telle sorte que les rayons soient assez peu inclinés sur une direction moyenne, et dans la théorie des analyseurs, il n'y a pas lieu de tenir compte de cette inclinaison si l'on s'astreint à n'utiliser que des polariseurs à champ normal et des lames biréfringentes usuelles perpendiculaires à l'axe du faisceau lumineux.*

B. — **Différents systèmes de plages.**

Analyseur à une seule plage. — Le mode d'observation étant précisé, nous pouvons maintenant commencer l'étude des différents systèmes de plages et discuter leur sensibilité.

L'appareil le plus simple est formé d'une plage unique, l'action de l'analyseur est la même sur la totalité du faisceau incident, elle est caractérisée par une vibration arrêtée E et un coefficient de transmission k. Ce résultat peut s'obtenir par un seul prisme polariseur à champ normal précédé de lames biréfringentes d'épaisseur constante

---

[1] L'étude des polariseurs à champ normal a été faite par Lippich (*Wien. Berich*, t. LXXXV, 1882, p. 268-326.

normales à la direction du faisceau et couvrant entièrement le champ lumineux.

L'image rétinienne a un éclairement uniforme

$$e = e_0 k \overline{\mathrm{EX}}^2 \qquad \text{où} \qquad e_0 = \varepsilon_0 k_0 n^2 \omega;$$

cet éclairement est nul seulement lorsque la vibration incidente X est confondue avec la vibration arrêtée E, l'analyseur est donc capable de distinguer cette vibration E.

Pour évaluer la sensibilité, remarquons qu'on s'apercevra que X n'est pas confondu avec E dès qu'il sera possible d'apprécier l'éclairement correspondant, si Δe est le plus faible éclairement appréciable par l'œil dans les conditions de l'expérience, l'erreur possible sur la position du point repéré sur la sphère est

$$\Delta l = \frac{1}{\sqrt{e_0}} \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\Delta e}.$$

L'erreur de pointé Δl se présente comme le produit de trois quantités d'origines différentes : il est donc légitime de les discuter séparément.

$e_0 = \varepsilon_0 k_0 n^2 \omega$ est l'éclairement de l'image rétinienne obtenue en enlevant les lames biréfringentes et les nicols qui constituent l'analyseur. La sensibilité est proportionnelle à la racine carrée de l'éclat du faisceau incident et au diamètre du cercle oculaire; elle croît lorsqu'on diminue l'absorption de la lunette d'observation.

k est le coefficient de transmission de l'analyseur; si celui-ci est formé par une seule lame biréfringente précédant un seul nicol, la vibration E′, conjuguée de la vibration arrêtée E, le traversera sans absorption notable, et le coefficient k sera voisin de l'unité.

Enfin le minimum d'éclairement perceptible Δe dépend d'une propriété de l'œil. Étant donnée sa sensibilité, on pourrait croire que cette méthode donne une grande pré-

cision. Il ne faut pas oublier qu'il est impossible de se délivrer de toute lumière parasite due en majorité à la dépolarisation du faisceau par le milieu traversé; il en résulte qu'on doit apprécier un minimum très sombre d'éclairement et cette opération devient plus difficile, car l'œil doit se souvenir des éclairements des images successives.

Pour éviter de faire appel à la mémoire, on peut utiliser la frange noire obtenue en remplaçant le polariseur à champ normal par un simple prisme de Nicol ou encore construire un analyseur à plusieurs plages. Les propriétés de l'œil utilisées dans ces différents cas ne sont pas les mêmes et par suite les différentes expressions de la sensibilité ne sont pas directement comparables. Leur discussion conduit à l'étude des conditions les plus favorables qu'on doit réaliser dans chaque cas, mais seule, l'expérience peut nous renseigner complètement sur le meilleur système de plages.

Analyseur à frange noire. — Il sera constitué par un prisme de Nicol précédé de lames biréfringentes à faces parallèles.

Les conditions d'observation sont ici différentes; l'action d'un tel analyseur est la même pour tous les rayons parallèles, on devra par suite mettre au point sur un diaphragme S placé à l'infini; le second diaphragme S′ sera mis dans la partie la plus étroite du faisceau; son image devra être formée sur la pupille.

Cette méthode n'est bonne que lorsqu'on peut utiliser une source intense, l'arc électrique ou le soleil. Elle convient mieux pour pointer une vibration rectiligne que pour déterminer une vibration elliptique quelconque, car il faut, dans ce dernier cas, faire deux observations sur la frange pour connaître à la fois l'ellipticité et la direction des axes de la vibration incidente.

L'étude complète de cet appareil peut se faire en utilisant les méthodes et les résultats indiqués par Lippich dans le travail déjà signalé.

Analyseur à deux plages. — Considérons un analyseur formé de deux plages caractérisées par les vibrations arrêtées E_1, E_2 et les coefficients de transmission k_1, k_2.

Si X désigne toujours la vibration incidente d'éclat ε_0, les éclairements des deux parties de l'image rétinienne sont

$$e_1 = e_0 k_1 \overline{E_1 X}^2,$$
$$e_2 = e_0 k_2 \overline{E_2 X}^2,$$

où

$$e_0 = \varepsilon_0 k_0 n^2 \omega.$$

L'égalité d'éclairement de ces deux images est l'aspect sensible qui sert à repérer une vibration incidente

Cette égalité est obtenue pour toutes les vibrations A vérifiant la relation

$$e_0 k_1 \overline{E_1 A}^2 = e_0 k_2 \overline{E_2 A}^2.$$

Le lieu géométrique des points A ainsi définis est une circonférence, intersection de la sphère représentative avec la sphère lieu des points M de l'espace, tels que

$$\frac{E_1 M}{E_2 M} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}.$$

L'aspect d'égalité de deux plages ne permet donc pas de caractériser entièrement une vibration elliptique quelconque; on doit simplement en conclure que le point représentatif se trouve sur un cercle particulier de la sphère. Mais si, d'autre part, on connait, a priori, *une condition assujettissant la vibration incidente, un analyseur à deux plages sera capable de fixer le point représentatif sur le lieu obtenu par cette autre condition. Par exemple, il est légitime de se*

servir d'un tel système de deux plages pour déterminer l'azimut d'une vibration qu'on sait être rectiligne, ou pour mesurer l'ellipticité d'une vibration dont on connaît la direction des axes.

Pour discuter la sensibilité de cette méthode, désignons par e la valeur commune des éclairements des deux parties de l'image rétinienne, lorsque la vibration incidente est représentée par un point A de la circonférence précédente, et par e_1, e_2 les éclairements de chacune de

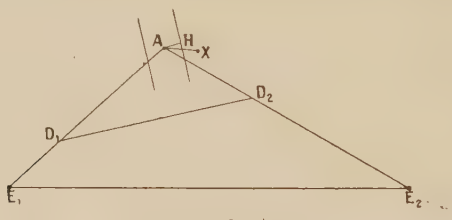

Fig. 5.

ces parties, lorsque cette vibration est représentée par un point voisin X (*fig.* 5).

On a

$$e = e_0 k_1 \overline{E_1 A}^2 = e_0 k_2 \overline{E_2 A}^2,$$

$$e_1 = e_0 k_1 \overline{E_1 X}^2, \qquad e_2 = e_0 k_2 \overline{E_2 X}^2.$$

Posons

$$\Delta e = e_2 - e_1, \qquad \Delta_1 e = e - e_1, \qquad \Delta_2 e = e - e_2;$$

par suite,

$$\Delta e = \Delta_1 e - \Delta_2 e.$$

Evaluons

$$\Delta_1 e = e_0 k_1 \left(\overline{E_1 A}^2 - \overline{E_1 X}^2 \right);$$

en élevant au carré l'égalité vectorielle

$$\overline{E_1 X} = \overline{E_1 A} + \overline{AX},$$

on obtient

$$\overline{E_1 X}^2 = \overline{E_1 A}^2 + \overline{AX}^2 + 2(\overline{E_1 A} . \overline{AX}).$$

Le symbole $(\overline{E_1A}.\overline{AX})$ représente le produit géométrique de ces deux vecteurs.

En négligeant le terme du second ordre $\overline{AX}^2$

$$\overline{E_1A}^2 - \overline{E_1X}^2 = 2(\overline{AE_1}.\overline{AX});$$

donc

$$\Delta_1 e = 2e_0 k_1 (\overline{AE_1}.\overline{AX}).$$

Portons dans la direction AE_1 un vecteur AD_1 de longueur $\sqrt{k_1}$: on aura

$$\Delta_1 e = 2e_0 k_1 \frac{AE_1}{AD_1} (\overline{AD_1}\,\overline{AX}).$$

Remplaçons les longueurs AE_1 et AD_1 par leurs valeurs $\sqrt{\frac{e}{e_0 k_1}}$ et $\sqrt{k_1}$: on obtient finalement

$$\Delta_1 e = 2\sqrt{ee_0}(\overline{AD_1}.\overline{AX}).$$

On a de même en portant dans la direction AE_2 le vecteur AD_2 de longueur $\sqrt{k_2}$

$$\Delta_2 e = 2\sqrt{ee_0}(\overline{AD_2}\,\overline{AX}).$$

En retranchant ces deux expressions, on obtient la valeur de la différence des éclairements des deux parties de l'image rétinienne, lorsque la vibration incidente est représentée par le point X voisin de A :

$$\Delta e = 2\sqrt{ee_0}(\overline{AX}\,\overline{D_2D_1}).$$

Si Δe représente dans ces conditions la plus petite différence sensible à l'œil, il en résulte que l'égalité d'éclat observée indique que la vibration X se trouve à l'intérieur d'un ruban circulaire qui, au voisinage de A, est perpendiculaire à D_1 D_2 et a pour demi-largeur

$$AH = \frac{1}{\sqrt{e_0}} \frac{2}{D_1D_2} \frac{\Delta e}{4\sqrt{e}}.$$

On peut remarquer que dans l'angle $E_1 AE_2$, que nous désignerons par A, le segment $D_1 D_2$ est antihomologue de $E_1 E_2$ et a pour longueur

$$D_1 D_2 = \sqrt{k_1 + k_2 - 2\sqrt{k_1 k_2} \cos A}.$$

L'expression qui donne la sensibilité est semblable à celle que nous avons déjà vue pour un analyseur à une seule plage; elle se compose de même du produit de trois facteurs et ces facteurs ont des significations analogues dans les deux cas.

Le terme $\frac{1}{\sqrt{e_0}}$ est resté le même; il exprime les propriétés du faisceau incident et du procédé d'observation; la sensibilité est encore ici proportionnelle à la racine carrée de l'éclat du faisceau incident et au diamètre du cercle oculaire.

Le terme $\frac{2}{D_1 D_2}$ dépend de l'analyseur, c'est-à-dire des positions des points E_1, E_2 et des valeurs des coefficients k_1, k_2. Le maximum de $D_1 D_2$ s'obtient pour $\cos A = -1$; on a alors $\frac{2}{D_1 D_2} = \frac{2}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}$. Cette condition exige que le point A soit entre E_1 et E_2 sur la droite joignant ces points; remarquons qu'elle ne pourra jamais être rigoureusement satisfaite, car le point A doit se trouver sur la sphère représentative. Nous verrons que la distance des points E_1, E_2 sur cette sphère est au plus de quelques degrés, il en résulte que le maximum de $D_1 D_2$ obtenu lorsque A est sur le grand cercle passant par les points E_1, E_2 ne diffère pratiquement pas de la valeur théorique $\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}$. Ici encore les coefficients de transmission doivent être aussi grands que possible, et pour un analyseur bien transparent pour les vibrations E'_1, E'_2 conjuguées des vibrations arrêtées E_1, E_2 la valeur minima du coefficient $\frac{2}{D_1 D_2}$ sera voisine de l'unité.

Le terme $\frac{\Delta e}{4\sqrt{e}}$ dépend des propriétés de l'œil, sa valeur varie avec la sensibilité de l'œil de l'observateur pour la radiation λ_0 utilisée, avec la finesse de la ligne de séparation des plages, et enfin avec la valeur e de l'éclairement moyen.

Dans chaque cas particulier, il est possible de déterminer par des mesures photométriques la fonction $\frac{\Delta e}{e} = \varphi(e)$ et d'en déduire la valeur de l'éclairement le plus convenable pour les mesures polarimétriques, c'est-à-dire qui rend minimum $\frac{\Delta e}{4\sqrt{e}}$. Les analyseurs à pénombre qui permettent de faire varier l'éclairement moyen e de façon à réaliser cette valeur optima sont dits *à sensibilité variable.*

Ce résultat s'obtient en agissant sur la distance $E_1 E_2$ des deux vibrations arrêtées.

En effet,

$$E_1 A = \sqrt{\frac{e}{e_0 k_1}}, \qquad E_2 A = \sqrt{\frac{e}{e_0 k_2}}.$$

Si nous nous plaçons dans le cas le plus favorable, où le point A est sur l'arc de grand cercle $E_1 E_2$ pratiquement confondu avec la corde,

$$E_1 E_2 = \sqrt{\frac{e}{e_0}}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right).$$

On appelle *angle des plages* la demi-distance angulaire des points représentatifs E_1, E_2 sur la sphère; dans le cas où ces points sont sur l'équateur, c'est l'angle des vibrations rectilignes correspondantes. Le rayon de la sphère étant $\frac{1}{2}$, l'angle des plages $\delta = \text{arc}\, E_1 E_2 = E_1 E_2$. En supposant $k_1 = k_2$, on a

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{k_1}}\sqrt{\frac{e}{e_0}}, \qquad AH = \frac{\delta}{8}\,\frac{\Delta e}{e}.$$

Il est souvent commode de transformer ces formules en remplaçant e_0 par sa valeur $e_0 = \varepsilon_0 k_0 n^2 \omega$ et posant $e = \eta n^2 \Omega$; la quantité η ainsi définie est l'éclat d'une source qui, observée directement, donne une image rétinienne d'éclairement e; on obtient

$$\delta = 2\sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon_0 k_0 k_1}}\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}}, \qquad \mathrm{AH} = \frac{\delta}{8}\frac{\Delta\eta}{\eta}.$$

Le facteur $\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}}$ est égal au rapport du diamètre de la pupille à celui du cercle oculaire.

Prenons un exemple pour indiquer l'ordre de grandeur des quantités considérées dans les formules précédentes. Dans une expérience faite par M. Broca [1], l'observateur regarde un disque en papier blanc éclairé normalement par une lampe à gaz de 10 bougies placée à une distance d centimètres.

L'éclairement de cette surface est $\frac{10}{d^2}$, son éclat est $\eta = \frac{0,63}{\pi}\cdot\frac{10}{d^2} = \frac{2}{d^2}$, en admettant 0,63 pour valeur du rapport du flux lumineux diffusé au flux reçu. On a tracé à l'encre de Chine, suivant un rayon, un large trait interrompu; le disque étant animé d'un mouvement de rotation, l'évaluation de la couronne perçue permet de mesurer $\frac{\Delta\eta}{\eta}$. Voici les résultats :

d.	100.	200.	300.	400.	500.
$\frac{\Delta\eta}{\eta}$	$\frac{1}{173}$	$\frac{1}{147}$	$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{44}$

Traçons une courbe (*fig.* 6) en portant en abscisses les valeurs de $\sqrt{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{d}$ et en ordonnées les valeurs correpondantes de $\frac{\eta}{\Delta\eta}$. La quantité $\frac{\sqrt{\eta}}{\Delta\eta}$ est représentée par le

---

[1] A. Broca, *Journal de Physique*, 3e série, t. III, 1894, p. 206.

coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine à un point de cette courbe; on voit qu'elle passe par un maximum pour $\sqrt{\eta} = 0{,}6.10^{-2}$; d'où

$$\eta = 0{,}36.10^{-4} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{1}{125}.$$

Ces nombres correspondent à l'observation binoculaire; avec un seul œil la sensibilité est environ la moitié.

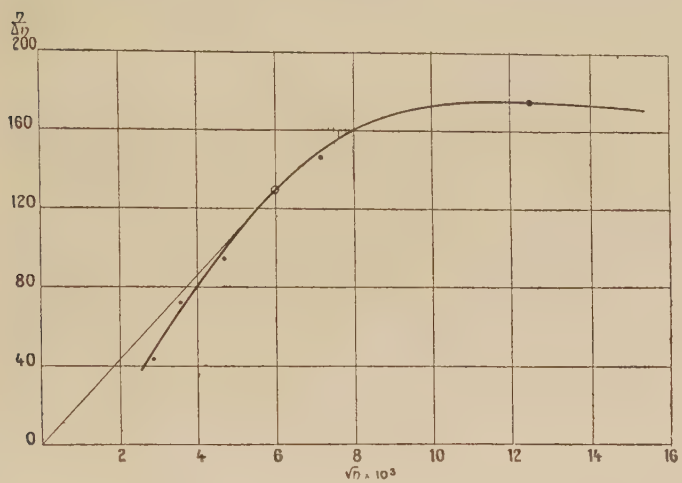

Fig. 6.

D'autre part, la ligne de séparation obtenue de cette façon est invisible, ce qui n'est pas toujours réalisé dans les appareils polarimétriques; et enfin, on n'a pas de lumière parasite. On doit donc forcer un peu ces nombres; on admettra pour valeur optima de l'éclairement $\eta = 0{,}5.10^{-4}$ et la sensibilité de l'œil correspondante $\frac{\Delta\eta}{\eta}$ sera prise entre $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{60}$ suivant la qualité de la ligne de séparation des plages.

Ces résultats ne sont valables en toute rigueur que pour M. Broca et la lumière blanche d'une lampe à gaz. Ils

conduisent cependant à un ordre de grandeur exact de la sensibilité pour un observateur normal, utilisant des radiations prises dans la partie moyenne du spectre comme je le montrerai en les appliquant à l'appareil particulier qui m'a servi dans mes recherches sur la constante de Kerr du sulfure de carbone.

Analyseurs à plusieurs plages. — Nous avons vu que l'observation de l'égalité de deux plages est insuffisante pour caractériser une vibration elliptique quelconque. Un appareil à plusieurs plages devra être employé dans le cas général où l'on ne sait rien sur l'état de polarisation du faisceau incident. Un pointé se fera par comparaison des images rétiniennes de ces plages prises deux à deux. On obtiendra l'expression de la sensibilité en appliquant les résultats précédents à chacune de ces opérations.

Considérons en premier lieu un analyseur formé de trois plages. On peut obtenir un tel analyseur avec un prisme polariseur A devant lequel on a disposé une lame biréfringente divisée en trois secteurs ayant mêmes lignes neutres, et dont les épaisseurs optiques sont o, $\frac{\lambda}{3}$, $\frac{2\lambda}{3}$. Soit toujours X le point représentatif de la vibration incidente; désignons par $E_1 k_1$, $E_2 k_2$, $E_3 k_3$ les vibrations arrêtées et les coefficients de transmission caractéristiques de cet analyseur.

L'égalité d'éclat des trois plages prises deux à deux entraîne les relations

$$\sqrt{k_1}\, E_1 X = \sqrt{k_2}\, E_2 X = \sqrt{k_3}\, E_3 X.$$

Deux points de la sphère représentative satisfont à ces conditions, mais seul l'un d'eux A, situé au voisinage des points E, est intéressant.

Chacune des observations fixe le point X à l'intérieur d'un ruban passant par A et, par suite, l'ensemble des

trois comparaisons possibles prouve que la vibration incidente est à l'intérieur d'un petit hexagone entourant le point A.

Calculons la sensibilité dans le cas le plus avantageux où le triangle $E_1 E_2 E_3$ est équilatéral et où $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Cet hexagone est alors régulier et son apothème est

$$AH = \frac{1}{\sqrt{e_0}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+1-2\cos 120^\circ}} \cdot \frac{\Delta e}{4\sqrt{e}} = \frac{\Delta e}{2\sqrt{3}\sqrt{ee_0}};$$

l'erreur possible est donnée par le rayon du cercle circonscrit

$$\rho = \frac{2\,AH}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta e}{3\sqrt{ee_0}}.$$

Cette méthode présente l'inconvénient d'obliger à faire trois comparaisons; il est bien évident qu'on peut se dispenser de l'une d'elles, mais alors le point X n'est plus fixé qu'à l'intérieur du losange commun à deux des rubans précédents et l'écart possible peut devenir notablement supérieur à la valeur que nous venons de calculer.

Il est plus commode d'employer un analyseur à quatre plages $E_1\ k_1$, $E_2\ k_2$, $E_3\ k_3$, $E_4\ k_4$, et de constater uniquement l'égalité des plages 1-2 et celle des plages 3-4 (*fig.* 7).

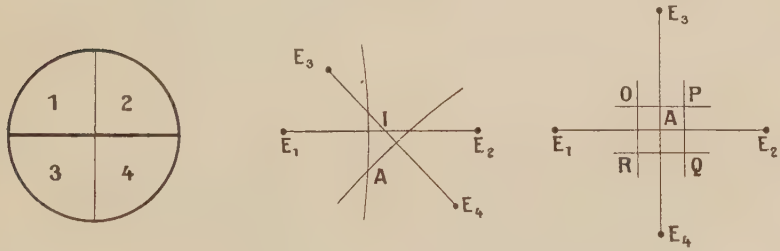

Fig. 7.

Le point défini A sera alors à l'intersection des deux cercles

$$\sqrt{k_1}\,E_1X = \sqrt{k_2}\,E_2X \qquad \text{et} \qquad \sqrt{k_3}\,E_3X = \sqrt{k_4}\,E_4X.$$

Comme dans le cas précédent, un seul des deux points d'intersection est intéressant; c'est celui qui se trouve au voisinage des points E et pour lequel l'éclairement des images rétiniennes est faible.

Pour que ce point A soit bien défini, il faut que ces deux cercles se coupent à angle droit. D'autre part, la sensibilité de chacun des pointés est maximum lorsque ce point se trouve sur chacun des deux grands cercles $E_1 E_2$ et $E_3 E_4$, et lorsque les angles des plages $E_1 E_2$ et $E_3 E_4$ correspondent à la valeur e la plus favorable de l'éclairement.

Pour que ces conditions puissent être satisfaites, il faut que les grands cercles $E_1 E_2$, $E_3 E_4$ se coupent orthogonalement en un point I tel que

$$\sqrt{k_1}\, E_1 I = \sqrt{k_2}\, E_2 I = \sqrt{k_3}\, E_3 I = \sqrt{k_4}\, E_4 I = \sqrt{\frac{e}{e_0}}.$$

Le point A est alors confondu avec I et l'observation fixe la vibration incidente à l'intérieur d'un petit rectangle OPQR (*fig.* 7). Dans le cas où $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, les deux figures $E_1 E_2 E_3 E_4$ et OPQR sont des carrés; ce dernier a pour apothème $AH = \frac{\Delta e}{4\sqrt{ee_0}}$ et l'erreur possible est donnée par le rayon du cercle circonscrit

$$\rho = AH\sqrt{2} = \frac{\Delta e}{2.83\sqrt{ee_0}}.$$

L'erreur maximum est un peu supérieure à celle que donne l'analyseur à trois plages; mais l'erreur moyenne n'est pas plus grande, car l'aire du carré OPQR est inférieure à l'aire de l'hexagone obtenu dans l'autre cas.

Nous verrrons à propos du compensateur que cet analyseur à quatre plages est bien supérieur à l'analyseur à trois plages, car il est possible de réaliser indépendamment l'une de l'autre les deux égalités qui constituent

le pointé. De plus, il est d'une construction plus facile, car il ne nécessite qu'une seule ligne fine de séparation.

Les analyseurs à deux et à quatre plages sont les seuls que j'ai étudiés expérimentalement; je me bornerai à donner quelques indications sur les autres systèmes pour bien montrer la généralité de la méthode d'étude qui a servi précédemment.

Analyseur possédant une infinité de plages. — Plaçons devant un analyseur à deux plages de Laurent ou de Lippich une lame cristalline d'épaisseur variable (lame de compensateur de Babinet) et orientons-la de façon que l'une de ses lignes neutres coïncide avec la vibration rectiligne A définie par l'analyseur à deux plages.

Supposons, de plus, cette lame taillée de telle sorte que l'épaisseur e soit la même pour tous les points d'une droite M N (*fig.* 8) perpendiculaire à la ligne de séparation PQ du prisme de Lippich ou de la lame demi-onde de Laurent.

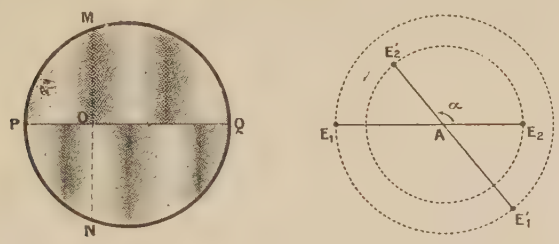

Fig. 8.

Pour tous les points de cette ligne MN, l'analyseur est représenté par l'une des deux vibrations arrêtées E'_1, E'_2 obtenues par une rotation de E_1 et E_2 effectuée autour de A et égale à

$$\alpha = 2\pi \frac{(n_b - n_a)e}{\lambda}.$$

L'aspect d'égalité de la ligne de séparation PQ au

point O prouvera que la vibration X reçue par l'analyseur est à l'intérieur d'un ruban perpendiculaire à $E'_1 E'_2$; l'égalité sur toute la ligne PQ fixera la position de X dans un petit cercle de centre A et ayant pour rayon la demi-largeur AH du ruban précédent. Mais il n'est pas légitime de prendre pour AH la valeur obtenue dans la discussion d'un analyseur à deux plages, car les plages à comparer sont ici infiniment étroites.

Si la vibration incidente X est confondue avec A, le champ entier doit paraître éclairé uniformément; mais lorsque cette condition n'est pas exactement réalisée, on perçoit dans les deux moitiés deux systèmes de franges, les parties brillantes de l'un correspondant aux parties sombres de l'autre.

Analyseur à disparition de franges. — Il sera simplement constitué par un prisme polariseur à champ normal devant lequel on a placé une lame de compensateur de Babinet; il n'y a plus de ligne de séparation. On peut très facilement faire varier la sensibilité par une rotation de cette lame. L'aspect est celui d'une des moitiés de l'analyseur précédent. Les franges disparaissent lorsque la vibration incidente est rectiligne et parallèle à l'une des lignes neutres de la lame biréfringente.

La sensibilité dépend d'une propriété de l'œil différente de celle qui a été discutée dans le cas de l'analyseur à deux plages. Une étude expérimentale peut seule servir de base à la comparaison de ces deux espèces d'instruments. L'analyseur précédent diffère du saccharimètre de Wild par sa sensibilité variable, on ne peut donc lui appliquer entièrement les résultats de l'étude de ce dernier appareil.

Une différence essentielle entre l'analyseur à quatre plages et les analyseurs à une infinité de plages ou a disparition de franges provient de ce que, pour ces der-

niers, la disparition des franges exige une infinité de conditions, et il peut être impossible de les satisfaire toutes si l'état de polarisation du faisceau n'est pas représenté par un point unique de la sphère. Au contraire, un pointé avec l'analyseur à quatre plages n'établit que deux relations, il est toujours possible de l'obtenir avec un compensateur et même si l'état de polarisation de la vibration incidente n'est pas unique, il indique un état de polarisation moyen.

Notons enfin que l'analyseur précédent à disparition de franges est de construction simple; la même lame convient pour n'importe quelle longueur d'onde et l'appareil peut facilement servir pour l'observation photographique avec des radiations ultraviolettes.

Analyseurs à pointés de franges. — Ce mode d'observation utilisé avec le compensateur de Babinet s'est montré moins précis que les méthodes de pénombre : nous n'en dirons que quelques mots.

De même que pour l'analyseur à disparition de franges, les points représentatifs des différentes plages se répartissent sur un cercle; mais, au lieu de distinguer le centre, on repère un point de la circonférence. L'examen de la position de la frange ne fixe pas entièrement la vibration incidente et si l'on veut étudier avec cet appareil une vibration quelconque, il faut y joindre une autre condition; par exemple que la frange soit parfaitement noire en son centre; cette dernière observation ne peut être faite avec précision.

C. — **Rôle du système compensateur.**

Le système compensateur est l'ensemble des dispositifs optiques ou mécaniques capables de déplacer sur la sphère

le point A défini par l'analyseur, et de mesurer ces déplacements [1].

Nous avons vu comment l'observation des plages permet de s'assurer que A coïncide avec la vibration incidente X, et nous savons que l'erreur de pointé mesurée par la distance AX reste constante si la figure formée par l'ensemble des points E affectés des coefficients k reste indéformable. Nous devons maintenant rechercher par quels procédés on peut obtenir le déplacement de cet ensemble de points E, et réaliser ainsi un analyseur à sensibilité constante.

Soient deux états d'un tel analyseur

$$\begin{array}{llll} E_1^0 k_1, & E_2^0 k_2, & \ldots & E_p^0 k_p, \\ E_1 k_1, & E_2 k_2, & \ldots & E_p k_p. \end{array}$$

définissant les vibrations A_0 et A.

---

[1] Cette définition déjà donnée (*cf.*, p. 13) du *système compensateur* a été imposée par la façon dont le problème de l'étude des vibrations elliptiques se sépare en deux parties indépendantes.

L'analyseur possède deux propriétés distinctes, définies : l'une, par la forme de la figure des points E correspondants aux différentes plages; l'autre, par les déplacements que font subir à cette figure les modifications de l'analyseur. Les lames cristallines (ou nicols) qui produisent les différences entre les plages et celles dont les mouvements produisent le déplacement de la figure E peuvent être confondues comme par exemple dans le compensateur de Babinet. Il arrive même que le système compensateur soit réduit à une simple rotation de l'ensemble de l'appareil, c'est le cas par exemple d'un analyseur rectiligne de Lippich.

Habituellement, on appelle *compensateur* une lame cristalline disposée en avant de l'analyseur et l'on définit son rôle en disant qu'elle ramène la vibration étudiée à être celle que pointe le reste de l'analyseur. Cette façon de voir est équivalente à celle que j'ai adoptée lorsque l'analyseur peut être décomposé en deux parties distinctes traversées successivement par le rayon lumineux; j'emploierai quelquefois ce mode d'exposition lorsque cette condition sera réalisée (méthode de Brace). On se rend compte qu'il est moins général et ne s'applique pas par exemple à l'analyseur de Lippich.

Il est toujours possible de faire coïncider la première figure avec la seconde par une rotation sur la sphère; cette rotation est bien définie et elle peut se décomposer d'une seule façon en un ensemble de deux rotations effectuées, la première autour de la ligne des pôles et la seconde autour d'un diamètre équatorial.

Il résulte de là que l'analyseur A peut s'obtenir en tournant l'analyseur A_0 d'un angle convenable autour de l'axe du faisceau lumineux, et en plaçant devant lui une lame biréfringente d'épaisseur et d'orientation bien choisies.

Un analyseur peut donc être constitué par un ensemble rigide de lames et de nicols (plages) précédé d'une lame biréfringente (compensateur), et l'observateur pourra amener la figure des points E dans une position quelconque sur la sphère, à condition de disposer des trois paramètres : orientation des plages, orientation du compensateur et retard introduit par ce dernier.

Il est donc inutile de chercher un système compensateur plus compliqué (pour le cas d'une source monochromatique que nous avons toujours considéré jusqu'ici), et il est impossible d'en avoir de plus simple, si l'on veut donner à la figure E toutes les positions possibles sur la sphère.

Mais cela n'est pas nécessaire; on peut en effet remarquer qu'une infinité de ces positions définissent le même point A; ce sont toutes celles qui se déduisent les unes des autres par une rotation de centre A et il suffit d'obtenir l'une d'entre elles pour qu'il soit possible d'analyser la vibration X confondue avec A; on a donc le droit de supprimer l'un des trois paramètres précédents ou d'établir une relation entre eux. C'est cette condition imposée à l'appareil qui distingue les uns des autres les différents systèmes compensateurs que nous étudierons.

Enfin, dans certains cas, le problème peut encore être

simplifié; il arrive qu'on possède *a priori* un renseignement sur la vibration étudiée (par exemple : on sait qu'elle est rectiligne, ou l'on connaît la direction des axes); on peut alors supprimer un deuxième degré de liberté choisi de telle façon que le dernier paramètre subsistant fasse décrire au point A le lieu géométrique des vibrations satisfaisant à la condition connue.

Recherches en lumière blanche. — Avant de commencer l'étude particulière des différents analyseurs, je dirai quelques mots sur les problèmes qu'on peut se poser lorsque la vibration incidente n'est pas parfaitement monochromatique. Si, quelle que soit la longueur d'onde, son état de polarisation est représenté par un même point X de la sphère, on peut se proposer de déterminer les coordonnées de ce point. Mais tel n'est pas le cas en général; le phénomène qu'on étudie par l'intermédiaire de la lumière polarisée varie avec la longueur d'onde et le lieu du point X est une courbe $X_r X_v$ sur la sphère.

Le problème n'est plus alors défini et il faut lui créer un sens par des conventions sur la forme de cette courbe; dans chaque cas particulier, la discussion est différente et l'on ne peut pas donner de résultats généraux.

Nous indiquerons cependant deux cas particuliers où le problème peut être précisé :

1° Lorsque la portion utilisée du spectre est très étroite (inférieure à 50 U. A.), l'œil n'est pas sensible aux différences de coloration et l'on peut avec un appareil quelconque faire le pointé comme en lumière monochromatique.

Pour interpréter les résultats, supposons que la vibration arrêtée E et le coefficient k qui définissent une plage soient les mêmes pour toutes les radiations; l'éclairement de l'image rétinienne de cette plage sera

$$e = \Sigma k \overline{EX}^2 \Delta e_0,$$

en désignant par Δe_0 l'éclairement élémentaire dû à la portion infiniment petite du spectre, à laquelle correspond le point X.

Soit X_m le centre de gravité des points X affectés des poids Δe_0.

On a

$$\Sigma\,\overline{EX}^2\,\Delta e_0 = \overline{EX_m}^2\,\Sigma\,\Delta e_0 + \Sigma\,\overline{X_m X}^2\,\Delta e_0.$$

En posant

$$e_0 = \Sigma \Delta e_0 \qquad \text{et} \qquad e_0 a^2 = \Sigma\,\overline{X_m X}^2\,\Delta e_0,$$

on peut écrire

$$e = e_0 k \left(\overline{EX_m}^2 + a^2\right).$$

Cette formule montre que tout se passe comme si l'état de polarisation du faisceau entier était représenté par le point X_m, à condition d'ajouter sur toute l'image rétinienne un éclairement parasite $e_0 k a^2$.

L'analyseur déterminera les coordonnées du point X_m, mais la sensibilité sera diminuée par suite de la présence de cette lumière parasite.

Si, de plus, nous supposons que la dispersion du phénomène est régulière, les points E se distribuent suivant un petit arc de cercle assimilable à un fragment de droite, le centre de gravité X_m se trouve sur cette droite et correspond à une longueur d'onde λ_m qui est pratiquement indépendante de cette dispersion supposée régulière; elle ne dépend plus que de la distribution des intensités dans la portion du spectre utilisée; on l'appelle le *centre de gravité optique.*

Ces résultats s'appliquent à la mesure d'un pouvoir rotatoire avec un polarimètre de Lippich lorsqu'on prend comme source lumineuse une petite partie du spectre solaire.

2° Lorsque la portion du spectre utilisée est beaucoup plus considérable, il peut arriver que la dispersion du

phénomène soit détruite par la dispersion propre du compensateur, de sorte qu'à la sortie de ce dernier, l'état de polarisation du faisceau soit représenté par un point unique X_0 de la sphère. Si, de plus, le système de plages peut déterminer ce point unique, il sera facile, connaissant la dispersion $\theta = f(\lambda)$ du compensateur, d'en déduire la courbe $X_r X_v$. Nous dirons dans ce cas que le compensateur achromatise le phénomène étudié et que le système de plages peut déterminer une vibration en lumière blanche.

Cette méthode est avantageuse pour rechercher avec une lumière blanche très intense un pouvoir rotatoire petit ou une biréfringence faible; la dispersion $X_r X_v$ proportionnelle à la grandeur du phénomène qui la produit se trouve très petite dans ce cas, et un achromatisme approché suffit pour qu'à la sortie du compensateur, l'état de polarisation soit représenté par un point unique X.

Nous verrons plus loin les appareils qui peuvent servir dans ces conditions.

CHAPITRE III.

Dans les deux Chapitres précédents, j'ai montré que le problème de l'analyse des vibrations elliptiques se séparait en deux parties distinctes, et j'ai indiqué quelques résultats généraux qui permettent de simplifier l'étude des divers appareils. Je n'en ferai pas l'application à tous les appareils connus; je me bornerai à un examen sommaire des analyseurs à pénombre.

Ce Chapitre sera divisé en quatre Parties : recherche de l'azimut d'une vibration rectiligne; mesure de l'ellipticité d'une vibration dont on connaît la direction des axes; détermination des éléments d'une vibration elliptique quelconque; enfin dans une quatrième Partie, je

décrirai l'analyseur que j'ai fait construire pour mes recherches sur la biréfringence électrique du sulfure de carbone.

A. - **Détermination de l'azimut d'une vibration rectiligne.**

On peut employer un appareil à deux plages $E_1 k_1$, $E_2 k_2$; la vibration rectiligne définie par l'égalité d'éclat de ces plages est représentée par l'intersection A de l'équateur de la sphère avec le cercle lieu des points M tels que $\sqrt{k_1}.E_1M = \sqrt{k_2}.E_2M$. Le maximum de sensibilité est obtenu lorsque les points E_1, E_2 sont sur l'équateur, lorsque $k_1 = k_2 = 1$ et lorsque l'angle des plages a une valeur convenable dépendant de l'éclat de la source lumineuse.

Rappelons les différents dispositifs employés pour obtenir les deux plages E_1, E_2 et donnons les propriétés caractéristiques de chacun d'eux.

1° *Nicol coupé de Cornu-Jellett* (1). Les points E_1, E_2 sont bien sur l'équateur; les coefficients k_1 et k_2 sont égaux et très voisins de l'unité, mais l'angle des plages est fixe, et pour obtenir l'éclairement optimum de l'image rétinienne, il faut avoir à sa disposition tout un jeu d'appareils d'angles différents. De plus, il y a un plan de séparation et il faut utiliser un faisceau assez parallèle pour ne pas apercevoir une ligne trop épaisse.

2° *Appareil de Lippich à deux prismes* (2). Les deux prismes sont à champ normal; les points E_1, E_2 sont sur l'équateur, l'angle des plages est facilement réglable,

(1) J.-H. Jellett, *Brit. Assoc. Report*, t. II, 1860, p. 13. — Cornu A., *Bull. de la Soc. chim.*, t. XIV, 1870, p. 140.

(2) F. Lippich, *Wien. Ber.*, t. LXXXV, 1882, p. 268-326; t. XCI, 1885, p. 1059-1096; t. CV, 1896, p. 317-361; *Ztschr. f. Instk*, t. II, 1882, p. 167-174; t. XII, 1892, p. 333-342; t. XIV, 1894, p. 326-327.

une seule des arêtes du petit prisme sert pour la ligne de séparation qui peut devenir très fine lorsque l'appareil est bien réglé; malheureusement, les absorptions sont différentes pour les deux plages $k_2 = 0{,}9\, k_1$; le cercle lieu des points M tels que $\sqrt{k_1}.E_1M = \sqrt{k_2}.E_2M$, n'est plus un méridien et il en résulte une erreur si l'on veut déterminer avec cet appareil la direction des axes d'une vibration elliptique aplatie ($\beta = 1^\circ$ ou 2°).

3° *Polariseur de Brace* (1). — On peut construire un appareil semblable à celui de Lippich en plaçant deux lames de spath mince dans une même cuve de liquide; on obtient ainsi une meilleure ligne de séparation et les absorptions sont les mêmes. Cet appareil, qui est le meilleur théoriquement, présente des difficultés de construction; il nécessite une cuve de liquide et des lames de verre pour fermer cette cuve.

Dans les trois analyseurs précédents, les positions de E_1 et E_2 sont indépendantes de la radiation utilisée; ils peuvent donc servir à pointer une vibration blanche de polarisation unique X ou à déterminer le centre de gravité d'une petite courbe $X_r X_v$.

4° *Lame demi-onde de Laurent* (2). — On obtient un analyseur à pénombre en plaçant devant un nicol, ou mieux, devant un polariseur à champ normal, une lame de quartz demi-onde (3) qui recouvre la moitié du champ. Le point E_1 est la direction de la vibration arrêtée par

(1) D.-B. Brace, *Phil. Mag.*, 6e série, t. V, 1903, p. 161-169.

(2) L. Laurent, *Journal de Phys.*, 1re série, t. III, 1874, p. 183-186.

(3) Dans le saccharimètre Laurent, cette lame est trois fois demi-onde, mais il est possible de tailler une lame de quartz exactement demi-onde. On pourrait aussi utiliser une lame de mica demi-onde, mais cette dernière solution est moins bonne; car, sous cette épaisseur, le mica est déjà jaune et il est en outre difficile de le couper de façon à obtenir une ligne de séparation bien nette.

le prisme (*fig.* 9), E_2 se déduit de E_1 par une rotation autour du point B qui représente la direction de l'axe de la lame demi-onde. Si la lame est exactement demi-onde, cette rotation est de 180° et le point E_2 est bien

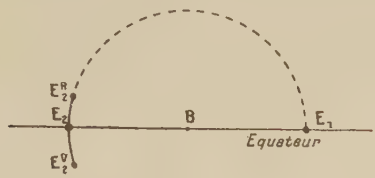

Fig. 9.

sur l'équateur. Si l'on utilise de la lumière blanche, les points E_2 se répartissent sur un petit arc de cercle $E_2^r E_2^v$. Pour que les coefficients k_1 et k_2 soient égaux, il faut coller la lame de quartz entre deux lames de verre ou la placer dans une cuve pleine d'un liquide de même indice que le quartz. Si l'on utilise de la lumière monochromatique, il n'est pas nécessaire que la lame soit exactement demi-onde. La formule générale de la sensibilité d'un système de deux plages montre que si la rotation E_1BE_2 est égale à $180° \pm \alpha$, la sensibilité est réduite dans le rapport de 1 à $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; pour $\alpha = 45°$, cette sensibilité est encore les $\frac{87}{100}$ du maximum, elle est réduite de moitié pour $\alpha = 90°$, c'est-à-dire si la lame est quart d'onde.

Lorsque $k_1 = k_2$, la vibration déterminée A est confondue avec B quelle que soit la position de E_2 sur l'arc de cercle $E_2^r E_2^v$; cet appareil peut donc servir à repérer l'azimut d'une vibration rectiligne blanche pourvu que son état de polarisation soit représenté par un point unique X de l'équateur. Mais si cet azimut varie avec la longueur d'onde, il peut se faire que l'analyseur de Laurent ne détermine pas exactement le centre de gravité de la courbe $X_r X_v$. Cette erreur est négligeable lorsque la distance $X_r X_v$ est petite par rapport à $E_1 E_2$.

Remarquons enfin qu'en tournant le prisme polariseur par rapport à la lame demi-onde, on peut facilement faire varier la sensibilité sans changer le zéro.

5° *Méthode de Poynting* (1). — On place devant le nicol analyseur une lame de quartz mince ($\frac{1}{10}$ de millimètre environ) taillée perpendiculairement à l'axe et qui recouvre la moitié du champ; ou bien une cuve pleine d'un liquide doué du pouvoir rotatoire; les deux plages sont alors obtenues par une cale de verre disposée dans une moitié de la cuve. Les deux points E_1, E_2 sont bien sur l'équateur, mais la position de l'un d'eux au moins dépend de la couleur; il en est de même de la vibration A définie par l'égalité d'éclat, et ces appareils ne peuvent servir qu'en lumière monochromatique.

Avec le second procédé on peut régler la sensibilité en changeant la concentration de la solution. Si l'on emploie du sucre, la lame de verre doit avoir quelques millimètres d'épaisseur, mais on peut la réduire en utilisant des liquides beaucoup plus actifs. On a employé dans ce but le limonène, on diminue ainsi l'effet de la trempe du verre et l'on augmente la finessse de la ligne de séparation.

Dans le cas de l'étude d'une vibration rectiligne, la compensation peut être très simplement obtenue par une rotation de l'analyseur effectuée autour de l'axe du faisceau lumineux. L'ensemble des points E_1, E_2 et le point A se déplaçent sur l'équateur d'un angle égal au double de cette rotation qui est lue sur un cercle gradué. Ce mode de compensation a l'inconvénient de ne pas pouvoir servir à achromatiser le phénomène étudié, car la rotation du point A ainsi produite est la même pour toutes les couleurs.

---

(1) J.-H. Poynting, *Phil. Mag.*, 5e série, t. X, 1880, p. 18-21.

Pour mesurer un pouvoir rotatoire en lumière blanche, on fait traverser au faisceau lumineux une épaisseur variable de quartz, taillé perpendiculairement à l'axe (compensateur de Soleil). Cette méthode convient bien pour l'analyse des sucres, car les dispersions du quartz et du sucre sont à peu près les mêmes. Bates [1] a construit récemment un saccharimètre en associant ce procédé de compensation à un analyseur de Lippich.

B. — **Mesure de l'ellipticité d'une vibration d'axes connus.**

C'est le problème qui se pose dans les recherches sur les phénomènes de double réfraction électrique et magnétique et d'une façon générale toutes les fois que l'on veut déterminer le retard introduit par une lame cristalline quelconque. Il peut être résolu par un analyseur à deux plages, à condition de savoir déplacer les points représentatifs E_1, E_2 d'angles mesurables sur le méridien lieu des ellipses qui ont leurs axes dirigés suivant les directions connues.

Méthode du quart d'onde [2]. — Une solution facilement réalisable s'obtient en plaçant une lame quart d'onde devant un analyseur rectiligne. Ce quart d'onde sera fixe et ses lignes neutres BC coïncideront avec la direction connue des axes de l'ellipse; l'analyseur rectiligne pourra tourner comme précédemment autour de l'axe du faisceau lumineux et ses rotations seront lues sur un cercle gradué. Les points E_1, E_2 se déduisent des points E_1^0, E_2^0 (*fig.* 10) représentant l'analyseur rectiligne supposé seul par une

---

(1) F. Bates, *Washington Bulletin of the Bureau of Standards*, t. IV, n° 3, 1907, p. 461-466.

(2) L'emploi de la lame quart d'onde avec un analyseur à pénombre est dû à Chauvin (*Annales de Toulouse*, 1889; *Journ. de Phys.*, 2e série, t. IX, 1890, p. 21). MM. Cotton et Mouton en ont fait souvent usage, avec l'arc au mercure. (*cf. Ann. de Chim. et de Phys.*, 8e série, t. XX, 1910, p. 275).

rotation de 90° autour de BC, ils se déplaceront sur le méridien de BC d'angles égaux au double des rotations de l'analyseur, il en sera de même du point A défini sur ce méridien par la condition d'égalité d'éclat. Il résulte

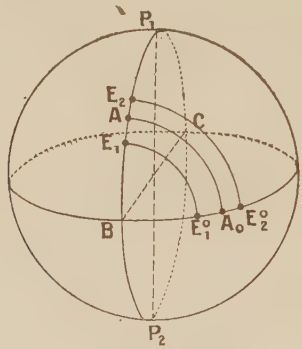

Fig. 10.

de là que l'ellipticité β de la vibration à analyser pourra être mesurée par l'angle dont il faut faire tourner l'analyseur pour pointer cette vibration après avoir pointé la vibration rectiligne B.

Il est facile de voir que toutes les erreurs de réglage n'interviennent sur la mesure qu'au second ordre; comme ces réglages se font sans difficulté à quelques minutes près, l'erreur qui résulte de leur incertitude est absolument négligeable.

Un inconvénient plus grave provient de l'inexactitude du quart d'onde. Si le retard introduit par le compensateur est $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, les points E_1, E_2, se déplacent sur un grand cercle faisant un angle ε avec le méridien de BC (*fig.* 11); le point défini A est à l'intersection de ce méridien et du cercle $\sqrt{k_1}.E_1M = \sqrt{k_2}.E_2M$, il est possible de calculer sa latitude. Dans le cas particulier où $k_1 = k_2$, le cercle lieu des points M est le grand cercle perpendi-

culaire au milieu D de E_1 E_2 et dans le triangle sphérique ADB rectangle en D, on a la relation

$$\cot BA = \cot BD . \cos \varepsilon .$$

Cette formule de correction a été donnée par MM. Cotton et Mouton.

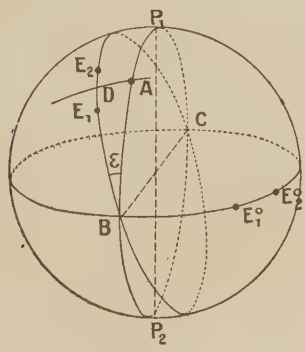

Fig. 11.

Il est possible de calculer la formule plus compliquée pour le cas où k_2 est différent de k_1 ; mais cela ne présente pas un bien grand intérêt, car la sensibilité diminue lorsque le point A s'éloigne des points E_1, E_2, et cette méthode ne peut être employée pour des mesures de précision qu'à la condition d'avoir un quart d'onde assez exact; l'erreur qui est du second ordre comme pour les défauts de réglage devient alors négligeable.

Les lames quart d'onde sont le plus souvent en mica et à moins de cliver un nombre considérable de lames, on n'arrive pas en général à en obtenir une qui soit à peu près exactement quart d'onde pour la radiation qu'on désire utiliser. La solution de ce problème peut être cherchée de deux façons : 1° on peut se proposer d'obtenir un quart d'onde réglable pour toutes les couleurs, avec un compensateur à teinte plate d'épaisseur variable; 2° on peut construire un quart d'onde exact et achromatique;

Brace [1] arrive à ce résultat en superposant deux lames cristallines, l'une de mica, l'autre de sélénite; enfin les phénomènes de réflexion totale permettent d'obtenir des quarts d'onde de dispersion très faible analogues au parallélépipède de Fresnel [2]. Signalons que la solution du quart d'onde achromatique donne deux points E_1, E_2 indépendants de la radiation utilisée; elle permet de se servir d'une petite bande de spectre en pointant le centre de gravité de la portion correspondante de la courbe $X_r X_v$.

Dans l'un ou l'autre de ces cas, la construction du compensateur devient beaucoup moins simple et des causes d'erreurs supplémentaires peuvent s'introduire : orientation inexacte des lames l'une par rapport à l'autre, trempe du verre, etc.

Nous verrons que la difficulté provenant de l'inexactitude du quart d'onde ne subsiste plus si l'on ne suppose pas connue la direction des axes de l'ellipse à analyser, il est alors préférable pour des mesures précises en lumière monochromatique de se servir d'un appareil général d'étude des vibrations elliptiques, tel que nous le décrirons plus loin.

Méthode du compensateur de retard variable. — Le problème de la détermination de l'ellipticité d'une vibration d'axes connus peut recevoir une deuxième solution simple, lorsqu'on possède une lame biréfringente d'épaisseur optique variable et facilement mesurable.

Le système de plages doit alors être caractérisé par deux points E_1^0, E_2^0 sur un même méridien. On amène ce méridien par une orientation convenable à coïncider avec le méridien BC lieu des ellipses satisfaisant à la condition connue. Le compensateur est fixé à ce système de plages de telle sorte que ses lignes neutres soient

---

(1) Brace, *Philos. Mag.*, 5e série, t. XLVIII, 1899, p. 345-360.
(2) A.-E. Oxley, *Phil. Mag.*, t. XXI, 1911, p. 517-532.

à 45° des axes BC (*fig.* 12). En appelant θ le retard variable qu'il introduit les points E_1, E_2 se déduisent de E_1^0, E_2^0 par une rotation d'angle — θ effectuée autour du diamètre EF perpendiculaire à BC. L'ellipticité β de la vibration à analyser X est mesurée par la demi-variation de θ

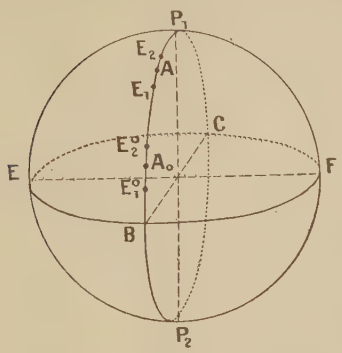

Fig. 12.

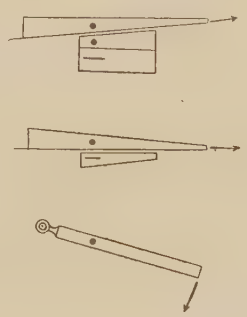

Fig 13.

lorsqu'on pointe successivement la vibration rectiligne B et la vibration X.

Cette méthode est analogue, pour les ellipticités, à la méthode du compensateur de Soleil pour les rotations; elle a de même l'avantage de pouvoir servir en lumière blanche. Elle demande un compensateur à teintes plates d'épaisseur variable; on peut l'obtenir de bien des façons différentes. La figure 13 représente trois procédés permettant de construire un tel compensateur avec des lames de quartz (*voir* Mascart, *Traité d'Optique*, t. II, p. 60). On peut aussi se servir d'une lame de verre tirée ou d'une cuve de sulfure de carbone soumis à un champ électrique. Dans chacun de ces cas, le paramètre dont on dispose et qu'il faut mesurer est le déplacement ou la rotation de la lame de quartz mobile, ou bien la force de traction s'exerçant sur le morceau de verre, ou encore la différence de potentiel agissant sur le diélectrique.

Le système de plages peut également s'obtenir de bien

des façons différentes. Nous dirons qu'il est équilibré (*Balanced Halfshade*, Tuckerman) si la vibration définie par le système de plages seul, lorsqu'on supprime le compensateur, est rectiligne. Avec la méthode du compensateur variable, il est en général indifférent que le système de plages soit équilibré ou non.

1° Devant un appareil de Lippich ou tout autre analyseur rectiligne à deux plages, E_1, E_2, on peut placer une lame quart d'onde couvrant le champ entier; le système de plages E'_1, E'_2 ainsi obtenu est équilibré si l'axe des lignes neutres du quart d'onde est parallèle à la vibration rectiligne A définie par le prisme de Lippich (*fig.* 14).

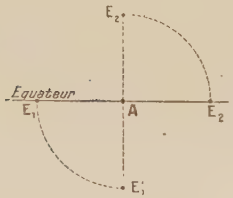

Fig. 14.

Fig. 15.

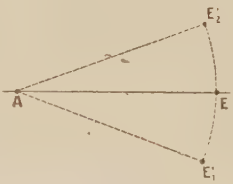

Fig. 16.

2° On dispose devant un nicol arrêtant la vibration E un appareil analogue à la lame double de Bravais, mais formé de deux lames de mica quart d'onde juxtaposées de telle façon que la ligne neutre de plus grand indice de l'une coïncide avec la ligne neutre de plus petit indice de l'autre [1]. Soit A le point représentatif de cette direction commune (*fig.* 15); on obtient ainsi un système de plages équilibré E'_1, E'_2 et l'on peut faire varier la sensibilité en tournant le nicol par rapport à la direction des axes du mica.

---

[1] Billet, *Traité d'Optique physique*, t. II, p. 225. — *Cf.* A. Cotton, *Ann. de Chim et de Phys.*, 7e série, p. 353. — Zakrzewski, *Bulletin Acad. Sciences, Cracovie*, 1907, p. 1016.

3° M. Eligio Perucca [1] propose une lame double analogue, mais d'épaisseur beaucoup plus petite ($\frac{1}{30}$ d'onde). Rien n'est changé, sauf que la distance AE doit être beaucoup plus grande pour un même angle des plages (*fig.* 16). On peut ainsi obtenir une ligne de séparation plus fine. Remarquons que dans ce cas, les points E'_1, E'_2 sont sur le méridien de E, au lieu d'être sur celui de A, et il est moins important de bien disposer à angle droit les lignes neutres des deux portions de l'appareil.

4° S'il n'est pas utile d'avoir un analyseur équilibré, il suffit d'employer une seule des deux lames précédentes qui recouvre la moitié du champ; la construction est alors très facile et la ligne de séparation peut être très bonne avec du mica assez mince.

5° Enfin on peut placer sur la moitié du champ une lame de verre tirée, la direction suivant laquelle on tire étant à 45° de la vibration rectiligne arrêtée par l'analyseur. Avec deux de ces lames croisées, Leiser [2] a construit un système de plages équilibré qui lui a servi pour la mesure des biréfringences électriques par la méthode de compensation de Des Coudres.

La précision des mesures sera celle des pointés polarimétriques si l'épaisseur optique du compensateur est suffisamment bien définie et mesurée. Plaçons-nous dans le cas où l'on utilise un compensateur en quartz, et négligeons toutes les difficultés provenant du pouvoir rotatoire du quartz pour les rayons du faisceau un peu inclinés et du défaut de parallélisme des axes des différentes lames qui constituent le compensateur.

Supposons que la précision des pointés permette une approximation de $1'$ sur l'angle 2β; il faut que le retard

---

(1) E. Perucca, *Nuovo Cimento*, 6e série, t. V, septembre 1913, p. 179.

(2) R. Leiser, *Abh. Deuts. Bunsen Gesellsch*, n° 4, 1910, p. 14.

introduit par le compensateur $\theta = 2\pi \frac{(n_2 - n_1)e}{\lambda}$ soit connu avec la même approximation; pour cela, l'épaisseur e doit être définie et mesurée avec une erreur inférieure à

$$\Delta e = \frac{1}{360 \times 60} \times \frac{0^{\mu},589}{0,00911} = 0^{\mu},003.$$

Si l'on admet que la vis micrométrique permet d'apprécier un déplacement de 1^{μ} l'angle des faces d'une lame du compensateur devra être de $\frac{3}{1000}$ ou $10'$ et leur planéité réalisée à près du millième de micron. La grande difficulté de cette méthode est donc d'obtenir un bon compensateur à retard variable.

Méthode de Brace. — La méthode de Brace [1] présente pour l'étude des vibrations d'ellipticités faibles les mêmes avantages que la méthode du compensateur variable, et elle n'offre pas les mêmes difficultés de construction. Le compensateur est une lame de mica mince ($\frac{1}{20}$ d'onde environ) et peut tourner dans une bonnette graduée. Brace utilise en outre un système de plages particulier obtenu en interposant sur le trajet du faisceau une lame très mince de mica divisée en deux parties telles que les retards correspondants θ_1 et θ_2 diffèrent de 1° ou 2°. Mais on peut conserver l'avantage de la méthode, qui est de pouvoir servir en lumière blanche, en employant le compensateur mince avec un système quelconque de deux plages, pourvu que les points représentatifs E_1, E_2 soient disposés sur un même méridien.

Dans le cas où l'on utilise le système de pénombre de Brace, on peut le disposer, soit avant, soit après le compensateur; nous décrirons seulement la méthode la plus

---

[1] Brace, *Physical Review*, t. XVIII, 1904, p. 70-88; t. XIX, 1904 p. 218-230.

employée [1]. Le faisceau lumineux traverse successivement le nicol polariseur, le système de pénombre de Brace, la lame biréfringente étudiée, le compensateur et enfin un nicol analyseur.

Le polariseur et l'analyseur sont croisés, soit P_0 la vibration rectiligne que laisse passer le polariseur (*fig.* 17)

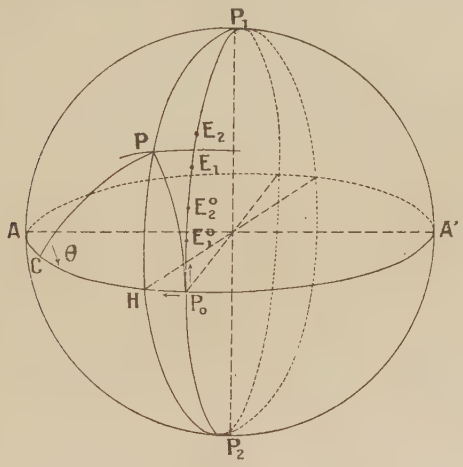

Fig. 17.

et que l'analyseur éteint. La lame de mica formant le système de pénombre et la lame étudiée ont leurs lignes neutres parallèles entre elles et à 45° de la direction de P_0. La vibration P_0 sortant du polariseur est transformée en E_1^0, E_2^0, puis E_1, E_2 par le passage successif de ces deux lames. Si l'on désigne par N_1 et N_2 les retards en longueurs d'onde introduits respectivement par chacune des moitiés de la lame de pénombre et par N le retard inconnu qu'on veut mesurer, les points E_1, E_2 sont sur le méridien

---

[1] G.-W. Elmen, *Phys. Review*, t. XX, 1905, p. 54. — L.-B. Morse, *Ibid.*, t. XXIII, 1906, p. 252. — C.-F. Hagenow, *Ibid.*, t. XXVII, 1908, p. 196. — H.-E. Mac Comb, *Ibid.*, 1908, p. 336.

de P_0 que nous choisissons comme méridien origine et ont pour latitudes

$$2\beta_1 = 2\pi(N_1 + N), \qquad 2\beta_2 = 2\pi(N_2 + N).$$

Soit C $(2\psi, 0)$ le point représentant l'un des axes du compensateur et θ le retard correspondant. Soit P le point représentatif de la vibration qui, après avoir traversé le compensateur, donne la vibration rectiligne P_0 éteinte par l'analyseur. Désignons par $(2\alpha, 2\beta)$ ses coordonnées; dans le triangle sphérique PHC, rectangle en H, on a deux relations entre les quatre éléments

$$\widehat{PCH} = \theta, \qquad \widehat{CP} = 2\psi, \qquad \widehat{CH} = 2(\psi - \alpha), \qquad \widehat{HP} = 2\beta,$$

et elles peuvent prendre les quatre formes suivantes :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} 2(\psi - \alpha) &= \operatorname{tang} 2\psi . \cos\theta, \\ \sin 2\beta &= \sin 2\psi . \sin\theta, \\ \cos 2\psi &= \cos 2(\psi - \alpha) . \cos 2\beta, \\ \operatorname{tang} 2\beta &= \operatorname{tang}\theta . \sin 2(\psi - \alpha). \end{aligned} \right.$$

Pour observer l'égalité d'éclat des deux plages, il faut que l'on ait $\sqrt{k_1} . E_1 P = \sqrt{k_2} . E_2 P$; lorsque $k_1 = k_2$, cette condition exige que le point P soit sur le grand cercle perpendiculaire à $E_1 E_2$ en son milieu D; mais alors dans le triangle sphérique $P_1 PD$ rectangle en D, on a la relation

$$\cot P_1 P = \cot P_1 D . \cos \widehat{PP_1 D},$$

qui s'écrit

$$(2) \qquad \operatorname{tang} 2\beta = \operatorname{tang} 2\pi \left(N + \frac{N_1 + N_2}{2} \right) \cdot \cos 2\alpha.$$

Pour obtenir N, il suffit de remplacer dans cette relation α et β par leurs valeurs qu'on calculera par les deux premières formules (1); mais on peut se proposer d'exprimer directement $\operatorname{tang} 2\pi \left(N + \frac{N_1 + N_2}{2} \right)$ en fonction

de ψ et θ. Remplaçons $\operatorname{tang} 2\beta$ par sa valeur donnée par la quatrième relation (1) on obtient

$$\operatorname{tang} 2\pi\left(N + \frac{N_1 + N_2}{2}\right) = \operatorname{tang}\theta . \frac{\sin 2(\psi - \alpha)}{\cos 2\alpha}$$
$$= \operatorname{tang}\theta . (\sin 2\psi - \cos 2\psi . \operatorname{tang} 2\alpha)$$

et il suffit de remplacer $\operatorname{tang} 2\alpha$ par sa valeur

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang} 2\psi . \frac{1 - \cos\theta}{1 + \operatorname{tang}^2 2\psi \cos\theta},$$

déduite de la première relation (1), on obtient après des simplifications évidentes

$$\operatorname{tang} 2\pi\left(N + \frac{N_1 + N_2}{2}\right) = \sin\theta . \sin 2\psi . \frac{1 + \operatorname{tang}^2 2\psi}{1 + \operatorname{tang}^2 2\psi \cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta . \sin 2\psi}{1 - 2\sin^2 2\psi . \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Cette dernière condition a été donnée par Tuckerman [formule (60) du Mémoire déjà cité].

La méthode de Brace ne s'applique qu'à l'étude des vibrations d'ellipticité faible; il faut en effet qu'on ait

$$2\pi\left(N + \frac{N_1 + N_2}{2}\right) < \theta,$$

et la valeur de θ doit être petite pour que le point P ne soit pas trop éloigné des points E_1, E_2, ce qui aurait pour effet de diminuer la sensibilité. Nous verrons que cet inconvénient peut être supprimé comme dans le cas de la méthode du quart d'onde, en ne supposant pas connue la direction des axes de l'ellipse étudiée. La méthode de Brace convient particulièrement pour la recherche des faibles ellipticités en lumière blanche; en plus de sa propriété d'achromatiser le phénomène étudié, elle présente sur la méthode du quart d'onde, l'avantage de ne pas demander un cercle gradué avec autant

de soin; la rotation du compensateur est en effet beaucoup plus considérable pour une même variation de la biréfringence mesurée.

C. — Détermination des éléments d'une vibration elliptique quelconque.

Formules générales. — Avant de commencer l'étude de ce problème, nous donnerons, avec les coordonnées sphériques, les formules générales qui traduisent l'action d'une lame biréfringente sur une vibration elliptique. Cette action se réduisant à une rotation du point représentatif sur la sphère, il est possible de déduire les formules correspondantes des relations d'Euler ou d'Olindes Rodrigues; elles s'obtiennent aussi très facilement par le procédé de calcul de Tuckerman; nous allons les établir directement comme application des remarques faites au sujet de la méthode de représentation des vibrations elliptiques.

Rapportons l'ellipse incidente aux lignes neutres xOy de la lame biréfringente, soient $(2\alpha, 2\beta)$ les coordonnées sphériques du point représentatif A, cela veut dire que le grand axe fait un angle α avec Ox et que le rapport des axes $\frac{B}{A} = |\operatorname{tang}\beta|$. Dans le plan uOv tangent à la sphère à l'origine, cette ellipse est représentée par l'affixe du coefficient angulaire de l'une de ses asymptotes. Les asymptotes font avec le grand axe des angles $\pm i\beta'$, tels que $\operatorname{tang} i\beta' = i \operatorname{tang}\beta$, donc avec OX des angles $\alpha \pm i\beta'$ et l'on a

$$u + iv = \operatorname{tang}(\alpha + i\beta').$$

(Le signe $+$ doit seul être pris dans cette formule, car v et β sont toujours de même signe.) En développant, multipliant les deux termes par la quantité conjuguée du

dénominateur, et faisant des simplifications évidentes, on obtient

$$(1) \qquad u + iv = \frac{\sin 2\alpha . \cos 2\beta + i \sin 2\beta}{1 + \cos 2\alpha . \cos 2\beta}.$$

L'action de la lame biréfringente s'obtient par une rotation autour de l'origine d'un angle $\theta = 2\pi(n_2 - n_1)\frac{e}{\lambda}$, n_1 et n_2 désignant les indices de la lame pour les vibrations rectilignes Ox et Oy.

Si l'on désigne par (u_1, v_1) $(2\alpha_1, 2\beta_1)$ les coordonnées des points représentatifs de la vibration sortante, on a

$$(2) \qquad \begin{aligned} u_1 + iv_1 &= (u + iv)e^{i\theta}, \\ \operatorname{tang}(\alpha_1 + i\beta'_1) &= \operatorname{tang}(\alpha + i\beta')e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Développons $\operatorname{tang}(\alpha_1 + i\beta'_1)$ comme $\operatorname{tang}(\alpha + i\beta')$ et égalons les parties réelles et imaginaires :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin 2\alpha_1 \cos 2\beta_1}{1 + \cos 2\alpha_1 \cos 2\beta_1} \\ &\quad = \frac{\sin 2\alpha \cos 2\beta}{1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta} \cos\theta - \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta} \sin\theta, \\ &\frac{\sin 2\beta_1}{1 + \cos 2\alpha_1 \cos 2\beta_1} \\ &\quad = \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta} \cos\theta + \frac{\sin 2\alpha \cos 2\beta}{1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta} \sin\theta. \end{aligned} \right.$$

Élevons au carré et ajoutons, on obtient après simplifications

$$\frac{1 - \cos 2\alpha_1 \cos 2\beta_1}{1 + \cos 2\alpha_1 \cos 2\beta_1} = \frac{1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta}{1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta};$$

cette égalité entraîne la relation

$$(4) \qquad \cos 2\alpha_1 \cos 2\beta_1 = \cos 2\alpha \cos 2\beta,$$

et si l'on en tient compte, les formules (3) deviennent

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} 2\alpha_1 &= \operatorname{tang} 2\alpha \cos\theta - \frac{\operatorname{tang} 2\beta}{\cos 2\alpha} \sin\theta, \\ \sin 2\beta_1 &= \sin 2\beta \cos\theta + \sin 2\alpha \cos 2\beta \sin\theta. \end{aligned} \right.$$

Ces formules permettent de déterminer $2\alpha_1$ et $2\beta_1$, sans ambiguité, la seconde donne une seule valeur de $2\beta_1$ comprise entre -90° et $+90^\circ$; la première donne deux valeurs pour $2\alpha_1$, entre 0° et 360°; mais la relation (4) montre que $\cos 2\alpha_1$ a le même signe que $\cos 2\alpha$ et cette remarque permet de choisir, entre les deux angles précédents, celui qui donne la direction du grand axe de l'ellipse.

Pour résoudre les formules (5) en 2α et 2β, il suffit de changer la place des indices et de remplacer θ par $-\theta$. Si l'on fait $\beta = 0$, on obtient comme cas particulier de ces relations les formules de résolution des triangles sphériques rectangles employées dans le Chapitre précédent.

Nous avons vu que l'appareil le plus simple pouvant servir à l'étude d'une vibration elliptique quelconque, se compose d'un système de plages indéformable, précédé d'un compensateur assimilable à une lame biréfringente unique.

Rapportons toutes les ellipses à des axes fixes Ox, Oy et désignons par O l'origine correspondante des coordonnées sur la sphère (*fig.* 18). Le système de plages doit être capable de définir complètement une vibration A_0, il peut tourner autour de l'axe du faisceau lumineux : pendant ce mouvement, le point A_0 décrit un parallèle, nous désignerons ses coordonnées par

$$2\varphi = \widehat{OP_0}, \qquad 2\beta_0 = \widehat{P_0A_0}.$$

Le compensateur est défini par son épaisseur optique $\theta = 2\pi\frac{(n_2 - n_1)e}{\lambda}$ et la direction de ses lignes neutres, soit C le point représentatif de la vibration rectiligne se propageant sans altération avec la plus grande vitesse, la valeur de θ correspondante est positive. L'analyseur définit la vibration A qui est transformée en A_0 par le passage du compensateur; A se déduit de A_0 par une rota-

tion $-\theta$ de centre C. Posons $\widehat{P_0C} = 2\psi$; et désignons par $2\alpha = \widehat{OP}$, $2\beta = \widehat{PA}$ les coordonnées de A. Les résultats précédents permettent d'écrire les relations

$$(6)\quad \begin{cases} \cos 2(\alpha - \varphi - \psi)\cos 2\beta = \cos 2\psi . \cos 2\beta_0, \\ \operatorname{tang} 2(\alpha - \varphi - \psi) \qquad = -\operatorname{tang} 2\psi \cos\theta + \dfrac{\operatorname{tang} 2\beta_0}{\cos 2\psi}\sin\theta, \\ \sin 2\beta = \sin 2\beta_0 \cos\theta + \sin 2\psi \cos 2\beta_0 \sin\theta. \end{cases}$$

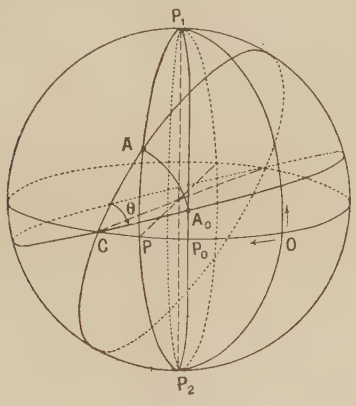

Fig. 18.

Ces formules se simplifient lorsque le système de plages est équilibré ($\beta_0 = 0$).

$$(7)\quad \begin{cases} \cos 2(\alpha - \varphi - \psi)\cos 2\beta = \cos 2\psi, \\ \operatorname{tang} 2(\alpha - \varphi - \psi) \qquad = -\operatorname{tang} 2\psi . \cos\theta, \\ \sin 2\beta = \sin 2\psi \sin\theta. \end{cases}$$

Ces dernières relations ne sont pas autre chose que les formules de résolution du triangle sphérique rectangle APC; on peut les écrire immédiatement, mais il faut alors déterminer les signes par l'examen d'un cas particulier de figure.

Conditions de l'indépendance des observations. — Nous avons déjà vu que si l'observateur possède un analyseur

permettant de faire varier et de mesurer les trois quantités θ, φ, ψ, il lui sera possible de donner à l'ensemble rigide des points E caractérisant le système de plages une position quelconque sur la sphère et de calculer les coordonnées du point défini A par les formules (6). On peut supprimer l'un des paramètres précédents sans que l'appareil cesse de pouvoir déterminer une vibration quelconque X; on a donc le droit d'introduire, par la construction de l'analyseur, une relation entre ces trois variables; un appareil général d'étude des vibrations elliptiques ne comportera plus alors que deux paramètres indépendants commandés par deux boutons B_1, B_2 et repérés par deux graduations correspondantes G_1, G_2. Dans le choix de ces paramètres, nous serons guidés à la fois par la facilité de construction de l'appareil et par la commodité des observations.

Pour faire l'étude de ces dernières conditions, nous supposerons que le système de pénombre utilisé est un système de quatre plages E_1k_1, E_2k_2, E_3k_3, E_4k_4, et que l'observation se fait en comparant les plages 1-2, puis les plages 3-4. Le maximum de commodité sera obtenu si l'action sur le bouton B_1 n'agit que sur la différence des éclairements des plages 1-2 et ne modifie pas l'égalité établie pour les plages 3-4; et si de même l'action sur B_2 permet d'établir l'égalité des plages 3-4 sans détruire celle des plages 1-2. En agissant successivement sur B_1 et B_2, on fait décrire au point A des courbes que nous désignerons par $G_2 =$ const. et $G_1 =$ const. La condition précédente sera satisfaite si dans ces mouvements E_1E_2 este perpendiculaire aux courbes $G_1 =$ const. et E_3E_4 aux courbes $G_2 =$ const. Mais on sait, d'autre part, que la précision maximum des pointés est obtenue lorsque E_1E_2 et E_3E_4 sont perpendiculaires; les deux familles de courbes $G_1 =$ const., $G_2 =$ const., devront donc être orthogonales.

En pratique, nous chercherons à construire l'analyseur de telle sorte que les courbes $G_1 =$ const. soient les parallèles et les courbes $G_2 =$ const. les méridiens. Si ces conditions étaient parfaitement réalisées, l'orientation de l'ellipse étudiée serait mesurée uniquement par la graduation G_2 et son ellipticité par G_1 et les appareils précédemment décrits pour l'étude des vibrations d'ellipticité ou d'axes connus ne seraient que des cas particuliers de l'appareil général obtenus en fixant à l'avance l'un des paramètres.

Le déplacement du point A sur un parallèle s'obtient facilement par une rotation de l'analyseur entier; malheureusement, il n'est pas toujours possible de satisfaire exactement à la deuxième condition et les valeurs de α et β sont des fonctions des deux paramètres qu'on peut calculer par l'intermédiaire des formules (6). Contrairement à ce que nous avons vu dans les cas particuliers précédents, cela n'enlève rien à la précision des mesures, car le système $E_1 E_2 E_3 E_4$ étant indéformable, le point A est toujours défini de la même façon. Seule la commodité de l'observation est diminuée : en agissant sur B_2 pour réaliser l'égalité 3-4, on détruit en effet un peu l'égalité 1-2; on doit la rétablir par une nouvelle action sur B_1 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne simultanément l'égalité des deux groupes de plages; en général, deux opérations suffisent.

Au point de vue de la construction, nous diviserons les analyseurs en deux catégories suivant qu'ils utilisent des compensateurs dont le retard θ est constant ou variable.

Méthode du compensateur variable. — L'un des paramètres est la rotation de l'analyseur entier (φ seul est variable) qui fait décrire un parallèle au point A; l'autre est le retard θ introduit par le compensateur; pour que le lieu correspondant du point A soit un méridien, il faut

que les lignes neutres du compensateur soient à 45° des axes de la vibration A_0 définie par le système de plages $2\psi = 90°$. En tenant compte de cette condition, les formules (6) deviennent

$$\alpha = \varphi, \quad 2\beta = 2\beta_0 + \theta.$$

Ces formules sont d'ailleurs évidentes et leur interprétation immédiate.

De même que pour l'étude d'une vibration elliptique d'axes connus, cette méthode présente dans le cas général deux avantages importants : 1° elle peut servir en lumière blanche si la dispersion $X_r X_v$ du phénomène étudié est normale et porte uniquement sur l'ellipticité; 2° la condition $\psi = 45°$ est facile à réaliser assez exactement. On retrouve les difficultés de construction d'un bon compensateur à retard variable.

Méthode du compensateur tournant. — Le retard θ est constant : nous supposerons le système de plages équilibré et nous nous servirons des formules (7); la troisième montre qu'on doit avoir $|\sin 2\beta| < |\sin\theta|$, l'ellipticité des vibrations qu'on peut étudier est limitée par la valeur de θ et le compensateur exactement quart d'onde permet seul d'analyser les vibrations presque circulaires. L'un des paramètres est toujours la rotation de l'analyseur entier, l'autre peut être la rotation du compensateur seul ou celle du système de plages. L'indépendance des observations peut être obtenue dans deux cas principaux correspondant à l'emploi d'un compensateur quart d'onde ou d'un compensateur d'épaisseur faible :

1° $\theta = 90°$, les formules (7) deviennent

$$\alpha = \varphi + \psi, \qquad \beta = \psi.$$

Le point A est sur le méridien de C le second paramètre devra être la rotation du système de plages seul; deux

cercles gradués permettront de lire les angles

$$\mu = \frac{\widehat{OC}}{2} = \varphi + \psi \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{\widehat{CP_0}}{2} = -\psi$$

et les coordonnées α et β sont données par les relations simples $\alpha = \mu$, $\beta = -\nu$. Si la condition $\theta = 90^\circ$ n'est pas exactement satisfaite, α et β se calculeront en remplaçant φ et ψ par $\mu + \nu$ et $-\nu$ dans les formules (6) ou (7).

2° θ est petit; les formules (7) deviennent en négligeant les termes en θ^2 devant l'unité

$$\alpha = \varphi, \qquad \beta = \theta \sin 2\psi.$$

Le point A est sur le méridien de A_0 : le second paramètre devra être la rotation du compensateur seul; les deux cercles gradués permettront de lire les angles $\varphi = \frac{\widehat{OP_0}}{2}$. $\psi = \frac{\widehat{P_0C}}{2}$. Si l'on n'a pas le droit de négliger entièrement les termes en θ^2, α et β se calculeront exactement par les formules (6) ou (7).

Comme la méthode du compensateur variable, ce dernier procédé peut servir en lumière blanche, si la dispersion du phénomène étudié porte uniquement sur l'ellipticité. Au contraire, la méthode du quart d'onde ne peut achromatiser la courbe $X_r X_v$ que si elle est confondue avec un parallèle.

Système de plages. — Avec toutes ces méthodes, on peut utiliser un système de quatre plages et les deux observations seront indépendantes si E_1, E_2 sont sur un même parallèle et E_3, E_4 sur un méridien.

Il est facile d'obtenir un tel système de plages équilibré en plaçant devant un analyseur rectiligne à deux plages une lame de mica quart d'onde couvrant la moitié du

champ et orientée de telle façon que l'une des lignes neutres du mica soit parallèle à la vibration rectiligne A définie par l'analyseur. Le bord du mica est perpendiculaire à la ligne de séparation de l'analyseur rectiligne, et les pointés se font seulement en comparant les éclairements des plages séparées par cette dernière ligne de séparation qui seule doit être très fine.

Détermination du zéro. Calculs. Erreurs. — Quelle que soit l'épaisseur optique du compensateur, les coordonnées de la vibration A sont toujours données exactement par les équations (6) ou (7); leur calcul nécessite la connaissance des angles φ et ψ ou, ce qui revient au même, des angles μ et ν. Les cercles gradués n'indiquent que les variations de ces angles et pour obtenir leurs valeurs, il faut connaître les positions des verniers lorsque les points A_0 et C sont confondus avec l'origine O.

Deux méthodes peuvent être employées :

Premier procédé. — On suppose connu le retard θ introduit par le compensateur. Il suffit de pointer une vibration connue pour que les mêmes équations permettent de calculer μ et ν et de déterminer le zéro des graduations.

En fait, on choisit une vibration rectiligne et l'on prend $2\alpha = 0, 2\beta = 0$, c'est-à-dire qu'on rapporte les vibrations étudiées à un système d'axes xOy choisi de façon que Ox soit parallèle à cette vibration rectiligne.

Nous supposerons pour simplifier que le système de plages est équilibré, et nous admettrons pour fixer les idées que l'analyseur est du premier type; les lectures donnent les valeurs de μ et ν et les équations utilisées seront

$$(8) \qquad \begin{cases} \cos 2(\alpha - \mu)\cos 2\beta = \cos 2\nu, \\ \operatorname{tang} 2(\alpha - \mu) = \operatorname{tang} 2\nu . \cos\theta, \\ \sin 2\beta = -\sin 2\nu . \sin\theta. \end{cases}$$

Si l'on fait $\alpha = \beta = 0$, on a $2\nu = 2\mu = 0$ ou π; pour prendre la solution 0, il faut avoir soin de placer le compensateur dans la position où la vibration rectiligne Ox le traverse sans altération avec la plus grande vitesse. Si l'on pointe ensuite une vibration inconnue X, les valeurs correspondantes de μ et ν seront données par les rotations des cercles qui permettent de passer de la première de ces positions à la seconde, et les relations (8) permettront de calculer sans ambiguité α et β.

L'erreur sur α et β provient des erreurs sur les valeurs de μ et ν ainsi déterminées et de l'erreur sur la valeur de θ admise pour le calcul. Les erreurs sur μ et ν proviennent des incertitudes des deux pointés servant à déterminer ces angles et des erreurs de lecture des cercles gradués; si ceux-ci sont assez précis, cette dernière erreur sera négligeable. Nous avons vu à propos des systèmes de plages que lorsqu'on pointe une vibration incidente X, la vibration A définie par l'analyseur n'est pas rigoureusement confondue avec X, mais se trouve à l'intérieur d'une petite surface de centre X (avec un système de quatre plages, cette petite surface est un carré). Les formules (8) donnent μ et ν en fonction de α et β; en prenant les différentielles totales, on peut calculer les incertitudes possibles sur μ et ν.

Il est facile de voir sans calcul, par l'examen de la figure sur la sphère que ces incertitudes sont toujours supérieures à l'incertitude qu'on a sur la position du cercle gradué dans un pointé polarimétrique, et qu'elles sont minima, lorsque la vibration repérée est rectiligne. Il résulte de là, d'abord, que les cercles n'ont pas besoin d'être gradués avec une précision supérieure à celle des cercles polarimétriques. En second lieu, à précision égale des pointés, l'erreur provenant de la détermination du zéro est plus faible que celle qui provient de la détermination de la vibration X; comme, d'ailleurs, il est possible

d'utiliser dans le premier cas une lumière blanche plus intense, on peut pratiquement admettre que toute l'erreur sur μ et ν est dûe à la seconde opération.

Si la valeur admise pour θ était exacte, le point calculé serait par suite A et l'incertitude sur la position de X pourrait être réduite à celle qui résulte forcément de l'imperfection de nos moyens d'observation. Nous savons qu'elle est représentée par une petite surface de la sphère indépendante de la position du point X. Au contraire, l'erreur provenant de la connaissance inexacte du retard θ est représentée sur la sphère par un petit vecteur perpendiculaire en X au grand cercle CX et de longueur $\Delta l = r\,\Delta\theta$, r désignant le rayon du cercle AA_0 décrit par A lorsque θ varie; en tenant compte de ce que le rayon de la sphère est $\frac{1}{2}$ il est facile de voir que $r = \frac{1}{2}|\sin 2\nu|$; par suite,

$$\Delta l = \frac{1}{2}|\sin 2\nu|.\Delta\theta = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin 2\beta}{\sin\theta}\right|\Delta\theta.$$

Cette formule montre que le compensateur quart d'onde est le plus avantageux et que Δl est d'autant plus faible que la vibration étudiée est plus aplatie. On voit de suite sur la figure que ce vecteur est, dans le cas du quart d'onde, perpendiculaire à la direction du méridien passant par X et, qu'au contraire, il lui est parallèle dans le cas d'un compensateur d'épaisseur faible. La première méthode sera plus avantageuse si l'on a spécialement en vue la mesure de l'ellipticité et la seconde si l'on veut déterminer la direction des axes. Nous verrons plus loin comment on construit les compensateurs et de quelle façon on peut mesurer leur épaisseur optique.

Deuxième procédé. Méthode de Stokes [1]. — On ne sup-

---

[1] G.-G. Stokes, *Phil. Mag.*, 4e série, t. II, 1851, p. 420-421. — Cf. Tuckerman, *loc. cit.*, et A. Tool, *Phys. Rev.*, t. XXXI, 1910, p. 1-25.

pose pas connue la valeur de θ. Les formules générales montrent, et d'autre part il est facile de voir en faisant la figure sur la sphère (*fig.* 19), qu'il existe deux positions

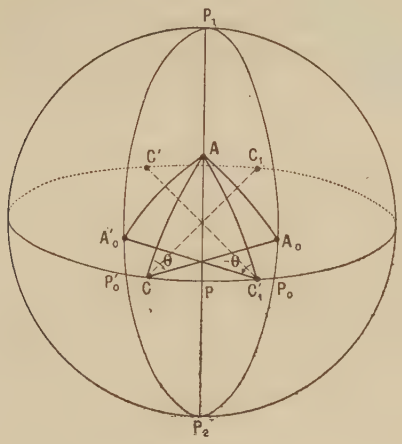

Fig. 19.

principales d'un analyseur permettant de pointer une vibration A. (Les positions secondaires s'obtiennent à partir des précédentes en tournant, soit le système de plages, soit l'analyseur d'angles égaux à π; ces rotations se traduisent sur la sphère par des rotations de 2π qui ne changent en rien la figure.)

Soient A la vibration à analyser; C, C_1, A_0 les points représentant les deux lignes neutres du compensateur et la vibration définie par le système de plages seul dans la première position. Dans la seconde position, les mêmes éléments sont représentés par C', C'_1, A'_0. Le point P est le milieu de $P_0P'_0$ ou de CC'_1. Admettons que les deux mouvements indépendants sont ceux de la méthode du quart d'onde et soient μ, ν, μ', ν', les lectures fixant les positions des deux cercles dans les deux positions. En désignant par O une origine arbitraire, mais inconnue, on

a $\frac{\widehat{OC}}{2} = \mu$, $\frac{\widehat{OC'}}{2} = \mu'$ et par suite $\widehat{OP} = \mu + \mu' - \frac{\pi}{2} + k\pi$. Les directions des axes de l'ellipse étudiée sont donc connues par rapport à une direction fixe de l'appareil.

Pour obtenir l'ellipticité, remarquons que le passage de la première position à la seconde s'effectue en tournant l'ensemble de l'analyseur d'un angle

$$\mu' - \mu = \frac{1}{2}\left(\widehat{CC'_1} + \pi + 2k_1\pi\right),$$

et le système de plages par rapport au compensateur d'un angle

$$\nu' - \nu = \frac{1}{2}\left(2\widehat{P_0C} + \pi + 2k_2\pi\right).$$

On a donc

$$\widehat{CP} = \frac{\widehat{CC'_1}}{2} = \mu' - \mu - \frac{\pi}{2} - k_1\pi,$$

$$\widehat{P_0C} = \nu' - \nu - \frac{\pi}{2} - k_2\pi.$$

Dans les triangles sphériques rectangles CP_0A_0 et CPA, on peut écrire les relations

$$\cos\widehat{CA_0} = \cos\widehat{CP_0}.\cos\widehat{P_0A_0} = \pm\sin(\nu' - \nu)\cos 2\beta_0.$$

$$\cos\widehat{CA} = \cos\widehat{CP}.\cos\widehat{PA} = \pm\sin(\mu' - \mu)\cos 2\beta.$$

en remarquant que $\widehat{CA} = \widehat{CA_0}$; on en déduit

$$\cos 2\beta = \pm\frac{\sin(\nu' - \nu)}{\sin(\mu' - \mu)}\cos 2\beta_0.$$

On peut déterminer $\cos 2\beta_0$ par la même méthode en pointant une vibration rectiligne. Pour choisir entre les quatre vibrations données par cette formule, il faut connaître l'ordre de grandeur de θ et examiner les signes des formules générales (6) ou (7).

Cette méthode a été employée par Tool; Tuckerman a

fait une discussion de sa sensibilité. Pratiquement, on se rend compte que son usage est défectueux, lorsque, par suite de l'incertitude des pointés, l'erreur relative sur $\sin(\mu' - \mu)$ devient supérieure à celle sur $\sin(\nu' - \nu)$. Elle ne peut être utilisée avantageusement que pour l'étude d'ellipses pas trop voisines des vibrations circulaires et en se servant d'un compensateur approximativement quart d'onde.

D. — **Réalisation d'un analyseur elliptique.**

J'ai fait construire un appareil général d'étude des vibrations elliptiques basé sur les principes développés précédemment; je suis heureux de remercier M. Jobin qui a apporté un soin minutieux à son exécution; sa grande expérience m'a été très utile pour le choix des dispositifs mécaniques à employer.

Comme cet appareil devait être utilisé avec une source de lumière monochromatique, j'ai adopté la solution du compensateur quart d'onde pour les trois raisons suivantes : 1° La précision obtenue dans la mesure des rotations d'un compensateur est supérieure à celle qui résulterait de l'évaluation du retard produit par un compensateur d'épaisseur variable; 2° Un compensateur quart d'onde peut servir à étudier une vibration elliptique quelconque; 3° il est inutile de connaître avec une grande exactitude le retard qu'il introduit; les erreurs qui en résultent n'influent qu'au second ordre sur la mesure de l'ellipticité de la vibration étudiée.

Les deux mouvements nécessaires pour satisfaire au principe de l'indépendance des observations sont la rotation de l'analyseur entier et celle du système de plages seul. Le dispositif mécanique utilisé est représenté schématiquement par la figure 20. Les deux mouvements sont définis par les cônes MNM'N', RSR'S' et commandés

par les boutons moletés B_1, B_2; les rotations sont mesurées par deux cercles gradués portés, l'un $C_1 C'_1$ par le

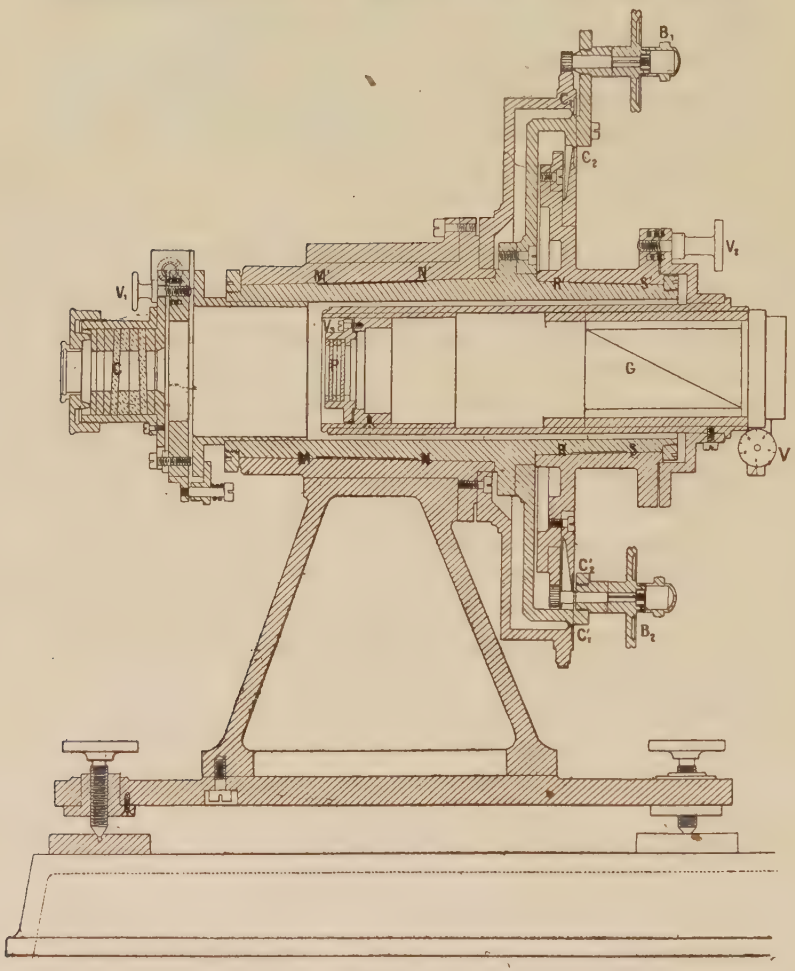

Fig. 20.

bâti de l'appareil, l'autre $C_2 C'_2$ par la partie mobile solidaire du système de plages; les quatre verniers sont fixés sur la monture du compensateur et tournent par le mou-

vement de rotation de l'ensemble de l'analyseur. Les graduations sont faites de 0° à 360° dans le sens des rotations positives; les lectures du cercle extérieur donnent la rotation de l'ensemble de l'analyseur, celles du cercle intérieur, la rotation du système de plages. Les divisions correspondent à des angles de 10′; les verniers sont au $\frac{1}{60}$ et permettent d'apprécier 10″.

Le compensateur C, formé par une lame de mica quart d'onde est construit et étalonné suivant les principes que je donnerai dans le Chapitre suivant. Il est porté par un volet disposé sur la partie antérieure de l'appareil qui permet de l'escamoter et de le remettre exactement en place. Cette opération n'est pas nécessaire pour l'analyse d'une vibration elliptique, mais elle est souvent commode pour les réglages. Trois vis V_1 permettent, après avoir dirigé l'axe commun des deux cônes suivant la direction du faisceau lumineux, d'orienter le compensateur perpendiculairement à cette direction.

Le système de plages P se compose d'une lame de quartz demi-onde et d'une lame de mica quart d'onde, disposées suivant le mode indiqué (p. 109), de sorte que les retards sur les quatre parties du champ sont 0, $\frac{\lambda}{2}$, $-\frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{4}$, et suivies d'un prisme de Glazebrook G [1]; l'ensemble peut être orienté perpendiculairement à la direction du faisceau par les vis V_2 et les lames cristallines seules par les vis V_3. J'ai employé successivement deux tels systèmes de plages; le premier était formé de lames nues portées par des pièces indépendantes, et une fois l'analyseur mis en place, on pouvait achever de régler l'orien-

[1] On utilise pour faire les mesures, la comparaison de la plage 0 à la plage $\frac{1}{2}$ et de la plage $-\frac{1}{4}$ à la plage $+\frac{1}{4}$; la ligne de séparation est constituée par le bord de la lame de quartz qui a été travaillée avec soin et paraît très fine surtout lorsque le système de plages est immergé.

tation de leurs lignes neutres; pour cela, après avoir enlevé le compensateur, on agissait sur l'orientation de ces deux lames, de façon à pointer une vibration rectiligne; on a ainsi constitué un système équilibré; si l'absorption était négligeable, cette condition exigerait le parallélisme des lignes neutres; il n'en est pas tout à fait ainsi, mais, comme nous l'avons vu, les conditions d'un emploi commode de l'analyseur sont que le système de plages soit équilibré, quelle que soit d'ailleurs la façon dont ce résultat a été obtenu. Dans le second de ces appareils, les deux lames sont disposées dans une cuve contenant un liquide (*cf.*, p. 134); l'orientation de leurs lignes neutres a été faite une fois pour toutes; il s'est trouvé que le système de plages n'était pas parfaitement équilibré; la vibration A_0 qu'il pointe sans compensateur, a une ellipticité de quelques minutes; il est facile d'éliminer les erreurs qui en résulteraient en prenant le zéro de l'appareil [1].

La section principale du prisme de Glazebrook fait un petit angle avec la direction commune des lignes neutres des deux lames cristallines; cet angle est la moitié de l'angle des plages; on peut le faire varier et le repérer par une vis V dont le tambour divisé se déplace devant une réglette graduée.

La lunette d'observation est montée sur un support indépendant qui repose comme l'appareil par trois vis calantes sur un banc de fonte. Sur le même support sont

---

[1] J'ai également utilisé dans les essais préliminaires où le compensateur était porté par une bonnette indépendante, un système de plages formé d'un appareil de Lippich, précédé d'une lame de mica quart d'onde recouvrant la moitié du champ. Ce dispositif est moins commode; la modification de la pénombre exige les déplacements indépendants du petit prisme de Lippich et de la lame quart d'onde; il semble préférable pour des recherches de précision en lumière blanche.

fixés : le dispositif qui sert à l'éclairage des verniers et le viseur qui permet leur lecture.

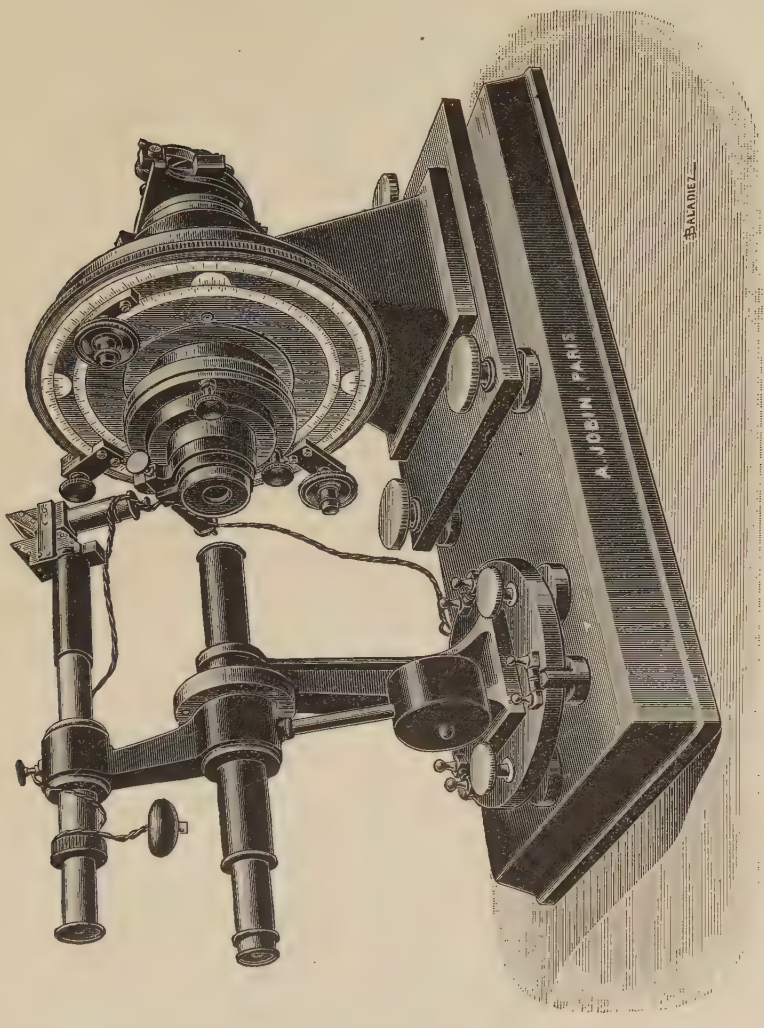

Fig. 21.

Pour que l'observation soit possible, on doit former des plages, une image à distance de vision distincte et du second diaphragme placé en général près du polariseur,

une image sur la pupille. La façon la plus simple de réaliser ces conditions serait d'employer une lentille de distance focale convenablement choisie et de placer un œilleton pour définir la position de l'œil. Pour donner au grossissement sa valeur la plus favorable, on serait alors conduit à rejeter le cercle oculaire à une assez grande distance de l'appareil; pour cette raison, j'ai préféré employer une lunette de Galilée qui joue le même rôle et dont la longueur est telle que l'observateur puisse facilement agir sur les boutons de commande de l'analyseur. Les dimensions de l'appareil ont été choisies de façon à satisfaire aux conditions de l'observation visuelle indiquées dans le Chapitre II : le diamètre des plages est 1^{cm}; elles apparaissent dans la lunette sous un angle de 1°; pour un second diaphragme de 1^{cm} placé à $1^{m},20$ en avant des plages, le cercle oculaire a un diamètre de 5^{mm}.

En utilisant comme source lumineuse, la radiation verte, purifiée spectralement, d'un arc à mercure Cooper-Hewitt en quartz, cet appareil a permis dans l'étude de la biréfringence électrique du sulfure de carbone [1] de mesurer des ellipticités atteignant 12° avec une erreur ne dépassant pas une demi-minute, c'est-à-dire à $\frac{1}{1500}$ près.

CHAPITRE IV.

ROLE DE LA LUMIÈRE RÉFLÉCHIE SUR LES LAMES CRISTALLINES.

Lorsqu'à l'aide d'un appareil général, on étudie une vibration elliptique, on doit toujours s'assurer qu'il est

---

[1] Dans ces expériences, la nécessité de faire passer le faisceau lumineux entre les plateaux du condensateur m'a forcé à réduire le diamètre du diaphragme du polariseur, de sorte que le cercle oculaire n'était plus que de $1^{mm},5$.

possible d'obtenir successivement une extinction complète des différentes plages.

Une plage paraît noire lorsque le point caractéristique E est en coïncidence avec le point X représentant l'état de polarisation du faisceau incident; cela suppose que cet état de polarisation est unique et que la plage considérée est bien représentée par une seule vibration arrêtée. Nous savons qu'il doit en être ainsi lorsque le faisceau, de faible ouverture, traverse uniquement des prismes polariseurs à champ normal et des lames usuelles de quartz ou de mica perpendiculaires à sa direction moyenne. Dans ces conditions, l'expérience vérifie bien que l'extinction des plages peut s'obtenir lorsque la vibration incidente X est presque rectiligne; mais, en général, il n'en est plus de même dès que son ellipticité devient notable.

Ce phénomène s'explique par la superposition au faisceau principal des rayons réfléchis plusieurs fois sur les lames cristallines qui constituent l'analyseur et plus particulièrement le compensateur. Cette lumière parasite peut avoir pour effet de diminuer la sensibilité et même de fausser les résultats. M. Dongier (1) a déjà signalé cette cause d'erreur qui, dans certains cas, peut devenir considérable. Je me propose d'en faire une étude plus complète au point de vue particulier de l'analyse des vibrations elliptiques : je montrerai comment son importance dépend de la nature du compensateur et de la pureté spectrale du faisceau lumineux utilisé et j'indiquerai un moyen simple de s'en affranchir.

---

(1) R. Dongier, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXII, 1896, p. 306; *Ann. de Ch. et Phys.*, 7e série, t. XIV, 1898, p. 475.

A. — Théorie et formules générales.

On sait que lorsqu'on reçoit sur une lame isotrope à faces parallèles, d'indice n et d'épaisseur e, un faisceau lumineux monochromatique polarisé rectilignement

$$x_0 = a_0 \cos \omega t,$$

il sort de l'autre côté différents faisceaux 1, 2, 3, ... d'intensités décroissantes.

Supposons la lame parfaitement transparente et appelons r le pouvoir de réflexion d'une de ses faces; c'est-à-dire le rapport de l'*intensité* de la lumière réfléchie à l'intensité de la lumière incidente; le pouvoir de transmission de cette même face est alors $1 - r$, de sorte qu'en désignant par δ la perte de phase due à la traversée de la lame, les faisceaux émergents ont pour équations :

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_0(1 - r)\cos(\omega t - \delta),\\
x_2 &= a_0(1 - r)r\cos(\omega t - 3\delta),\\
x_3 &= a_0(1 - r)r^2\cos(\omega t - 5\delta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'incidence est normale, $\delta = 2\pi \frac{ne}{\lambda}$; on a négligé la perte de phase de π qui peut se produire à la réflexion, car tous les faisceaux ont subi un nombre pair de réflexions.

Lorsque leur différence de marche n'est pas trop considérable, ces faisceaux interfèrent entre eux pour donner la vibration

$$\begin{aligned}
x = a\cos(\omega t - \varphi) \equiv a_0(1 - r)[&\cos(\omega t - \delta)\\
&+ r\cos(\omega t - 3\delta) + r^2\cos(\omega t - 5\delta) + \ldots].
\end{aligned}$$

Identifions et faisons les sommes des seconds membres, on obtient les expressions de $a\cos\varphi$ et $a\sin\varphi$;

d'où

$$a = a_0 \frac{1 - r}{\sqrt{1 - 2r\cos 2\delta + r^2}},$$

$$\cos\varphi = (1 - r)\frac{\cos\delta}{\sqrt{1 - 2r\cos 2\delta + r^2}},$$

$$\sin\varphi = (1 + r)\frac{\sin\delta}{\sqrt{1 - 2r\cos 2\delta + r^2}}.$$

Supposons maintenant qu'on reçoive un faisceau lumineux polarisé elliptiquement sur une lame biréfringente à faces parallèles, nous pouvons décomposer la vibration incidente en deux vibrations rectilignes, suivant les directions principales de la lame

$$x_0 = a_0 \cos\omega t, \qquad y_0 = b_0 \cos(\omega t - \theta_0);$$

pour chacune d'elles, les calculs précédents sont valables et le faisceau sortant peut être représenté par les équations

$$x = a\cos(\omega t - \varphi), \qquad y = b\cos(\omega t - \theta_0 - \psi).$$

Appelons n_1 et n_2 les deux indices principaux de la lame, δ_1 et δ_2 les pertes de phase correspondantes, et posons pour simplifier l'écriture

$$R_1 = \sqrt{1 - 2r\cos 2\delta_1 + r^2}, \qquad R_2 = \sqrt{1 - 2r\cos 2\delta_2 + r^2},$$

les valeurs de a, b, φ, ψ sont données par les relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{a_0(1 - r)}{R_1}, & b &= \frac{b_0(1 - r)}{R_2}, \\ \cos\varphi &= \frac{(1 - r)\cos\delta_1}{R_1}, & \cos\psi &= \frac{(1 - r)\cos\delta_2}{R_2}, \\ \sin\varphi &= \frac{(1 + r)\sin\delta_1}{R_1}, & \sin\psi &= \frac{(1 + r)\sin\delta_2}{R_2}. \end{aligned} \right.$$

On a supposé que le pouvoir de réflexion de la lame est le même pour les deux faisceaux polarisés suivant les directions principales, ce qui est pratiquement vrai pour

une lame de quartz ou de mica ou encore pour un parallélipipède de Fresnel.

La vibration incidente peut être définie par son intensité $I_0 = a_0^2 + b_0^2$, le rapport des amplitudes des deux composantes $\frac{b_0}{a_0} = \operatorname{tang}\gamma_0$ et leur différence de phase θ_0; de même la vibration sortante sera caractérisée par $I = a^2 + b^2$, $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}\gamma$, $\theta_0 + \psi - \varphi$, et l'action de la lame sera donnée par les trois quantités θ, h, k, telles que

$$\theta = \psi - \varphi, \qquad \operatorname{tang}\gamma = h \operatorname{tang}\gamma_0, \qquad I = k I_0.$$

Posons

$$\delta = \delta_2 - \delta_1, \qquad \Delta = \delta_2 + \delta_1.$$

On a :

$$R_1 = \sqrt{1 - 2r\cos\Delta\cos\delta + r^2 - 2r\sin\Delta\sin\delta},$$
$$R_2 = \sqrt{1 - 2r\cos\Delta\cos\delta + r^2 + 2r\sin\Delta\sin\delta},$$

et les formules (1) permettent de calculer :

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{(1+r^2)\cos\delta - 2r\cos\Delta}{R_1 R_2}, & \sin\theta = \dfrac{(1-r^2)\sin\delta}{R_1 R_2}, \\ h = \dfrac{R_1}{R_2}, & k = (1-r)^2\left(\dfrac{\cos^2\gamma_0}{R_1^2} + \dfrac{\sin^2\gamma_0}{R_2^2}\right). \end{cases}$$

Les réflexions successives n'ont pas pour seul effet de modifier la différence de phase introduite entre les deux composantes principales, mais encore elles les affaiblissent inégalement, de sorte que la lame doit être considérée comme dichroïque.

L'action d'une telle lame s'obtient facilement au moyen de la représentation géométrique (*fig.* 22).

Rapportons les ellipses aux lignes neutres de la lame, et soient $p_0(u_0, v_0)$, $P_0(2\alpha_0, 2\beta_0)$ les points représentatifs dans le plan et sur la sphère de la vibration incidente; soient de même $p(u, v)$, $P(2\alpha, 2\beta)$ les points représentatifs de la vibration sortante. On sait que $op_0 = \operatorname{tang}\gamma_0$, $op = \operatorname{tang}\gamma$, $\widehat{p_0 op} = \theta$; *le point p se déduit de p_0 par une*

homothétie de rapport h et une rotation d'angle θ effectuées avec l'origine comme centre. Les formules donnant u et v sont contenues dans la relation.

$$u + iv = h(u_0 + iv_0)e^{i\theta},$$

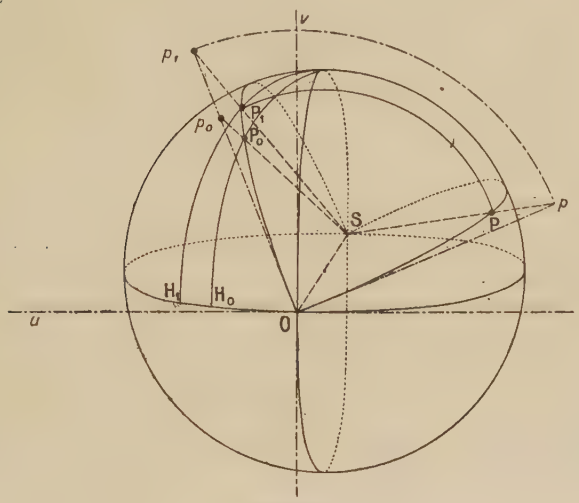

Fig. 22.

et les valeurs de α, β peuvent se déduire de la formule

$$\operatorname{tang}(\alpha + i\beta') = he^{i\theta}\operatorname{tang}(\alpha_0 + i\beta'_0),$$

les angles β' et β'_0 étant définis par les relations

$$\operatorname{tang} i\beta' = i' \operatorname{tang}\beta, \qquad \operatorname{tang} i\beta'_0 = i \operatorname{tang}\beta_0.$$

Les calculs présentés de cette façon sont en général compliqués et il est plus commode pour obtenir les valeurs de 2α, 2β de passer par l'intermédiaire des coordonnées d'un point auxiliaire déduit de P_0 par l'une seule des deux opérations précédentes.

Soit par exemple P_1 $(2\alpha_1, 2\beta_1)$ le point obtenu par l'homothétie seule, les côtés des triangles sphériques rectangles OH_0P_0, OH_1P_1 sont $2\gamma_0$, $2\alpha_0$, $2\beta_0$; $2\gamma_1$, $2\alpha_1$, $2\beta_1$.

Ces triangles ont en plus l'angle en O commun; en écrivant les relations des triangles sphériques rectangles, on obtient immédiatement, pour calculer α_1, β_1, la suite des relations simples :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos 2\gamma_0 = \cos 2\alpha_0 \cos 2\beta_0,\\ &\operatorname{tang}\gamma_1 = h \operatorname{tang}\gamma_0,\\ &\operatorname{tang} 2\alpha_1 = \frac{\operatorname{tang} 2\gamma_1}{\operatorname{tang} 2\gamma_0} \operatorname{tang} 2\alpha_0,\\ &\sin 2\beta_1 = \frac{\sin 2\gamma_1}{\sin 2\gamma_0} \sin 2\beta_0. \end{aligned}\right.$$

Le point P s'obtient ensuite par une rotation de P_1 d'angle θ et l'on sait calculer ses coordonnées [*cf.* p. 103, formules (5)].

Les résultats précédents permettent d'étudier complètement l'action d'une lame biréfringente à faces parallèles sur un faisceau lumineux polarisé elliptiquement; on cherchera d'abord les valeurs de r, δ, Δ; les formules (2) donneront ensuite θ, h, k et enfin, connaissant ces quantités, et le faisceau incident, on sait calculer l'intensité et l'état de polarisation du faisceau issu de la lame.

Une valeur théorique du coefficient r est donnée par les formules de Fresnel; pour l'incidence normale $r = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$; en remplaçant successivement n par 1,60 (mica), 1,55 quartz), 1,50 (verre ordinaire), on trouve pour r : $\frac{1}{18,8}$, $\frac{1}{23,6}$, $\frac{1}{25}$ L'état de propreté de la surface peut modifier la fraction de lumière réfléchie, mais elle reste toujours de l'ordre de grandeur précédent.

Pour un faisceau normal à la lame biréfringente, les angles δ et Δ sont donnés par les relations

$$\delta = 2\pi \frac{(n_2 - n_1)e}{\lambda}, \qquad \Delta = 2\pi \frac{(n_2 + n_1)e}{\lambda},$$

δ est la différence de phase introduite par le passage de la

lame entre les deux vibrations rectilignes principales; l'épaisseur de la lame est choisie suivant la valeur qu'on désire obtenir pour cette quantité. Pour le mica et la radiation jaune du sodium, on a

$$n_2 - n_1 = 0,005, \qquad \frac{n_2 + n_1}{2} = 1,6;$$

l'épaisseur e doit être approximativement de $29^{\mu},5$ pour un quart d'onde et de 4^{μ} pour un compensateur de Brace de $\frac{1}{30}$ d'onde. Pour le quartz

$$n_2 - n_1 = 0,0091, \qquad \frac{n_2 + n_1}{2} = 1,548,$$

une lame demi-onde doit avoir une épaisseur de $32^{\mu},4$, on ne peut tailler des lames plus minces et pour obtenir un quart d'onde en quartz, il est nécessaire de prendre une lame d'une onde et quart ou de coller deux lames croisées dont les retards diffèrent d'un quart d'onde.

Δ représente la différence de phase entre le faisceau direct et le faisceau deux fois réfléchi; l'expression précédente a été obtenue en supposant que la lame biréfringente est employée nue; souvent, elle est collée entre deux lames minces de verre destinées à la protéger. Dans ce cas, la théorie doit tenir compte de la lumière réfléchie sur la surface de séparation de deux milieux quelconques; mais les indices du verre, de la lame et de la colle étant voisins, seules les réflexions sur les faces extérieures des lames protectrices sont importantes; rien n'est alors changé à la théorie précédente à condition de prendre pour Δ la valeur

$$\Delta = 2\pi \frac{(n_2 + n_1)e}{\lambda} + \sum 4\pi \frac{n' e'}{\lambda},$$

où n' et e' désignent les épaisseurs des différents milieux isotropes recouvrant la lame biréfringente.

Lorsque la lame est nue $\Delta = \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}\delta$: pour le mica

$\Delta = 640\,\delta$, pour le quartz $\Delta = 340\,\delta$, pour un quart d'onde en mica nu $\Delta = 160 \times 2\pi$.

La valeur de Δ devient beaucoup plus considérable pour des lames recouvertes; elle est égale à $6000 \times 2\pi$ lorsque l'ensemble de la lame et des verres protecteurs a une épaisseur voisine de 1^{mm}; enfin, avec un parallélépipède de Fresnel, elle peut atteindre $300\,000 \times 2\pi$.

Pour que Δ soit le même d'un point à l'autre de la lame, il est nécessaire que les épaisseurs e et e' soient uniformes, ce qui exige une planéité presque parfaite des surfaces de séparation des différents milieux. Cette condition n'est en général pas satisfaite pour les faces des verres protecteurs, de sorte que, dans le cas d'une lame recouverte, la valeur de Δ peut varier de plusieurs circonférences lorsqu'on se déplace sur la surface.

Les expressions donnant Δ et δ changent lorsque le rayon incident n'est plus normal à la lame biréfringente; elles deviennent beaucoup plus compliquées; mais, dans le cas des lames usuelles de quartz perpendiculaire à l'axe et de mica clivé, les variations sont du second ordre, par rapport à l'angle d'écart et par suite très petites pour des incidences faibles.

En utilisant un faisceau d'axe normal à la lame et ayant le parallélisme du faisceau solaire, les incidences extrêmes sont de $15'$: les variations de δ correspondantes sont tout à fait négligeables, les variations de Δ sont inférieures au degré pour des lames nues; elles peuvent devenir plus considérables pour des lames recouvertes et même de plusieurs circonférences dans le cas du parallélépipède de Fresnel.

Il reste à voir comment δ et Δ sont fonctions de la longueur d'onde. Les variations de δ sont données par la courbe de dispersion de la double réfraction de la substance employée; celles de Δ dépendent de la dispersion de l'indice moyen. Pour le quartz et le mica, les variations

relatives de $n_1 - n_2$ et $n_1 + n_2$ sont faibles par rapport à celles de λ de sorte que les angles δ et Δ augmentent environ de $\frac{1}{40}$ à $\frac{1}{50}$ de leurs valeurs lorsque la longueur d'onde diminue de 100 U.Å. Pour un quart d'onde en mica et une bande spectrale de 100 U.A. les variations de δ sont de 100′ environ et celles de Δ de trois circonférences, si la lame est nue et de 120, si elle est recouverte de façon à former un ensemble de 1^{mm} d'épaisseur. Enfin, avec un parallélépipède de Fresnel, les variations de δ ne sont que de 3′ dans les mêmes conditions, mais celles de Δ peuvent dépasser $5000 \times 2\pi$.

En résumé, δ est en général bien défini et possède une valeur unique pour tous les rayons du faisceau incident; mais il n'en est pas de même de Δ, sauf dans le cas particulier où l'on utilise une lame biréfringente nue avec une radiation monochromatique de largeur inférieure à quelques dixièmes d'unités d'Angstrôm. Dans ces conditions seulement, il peut être possible d'obtenir les valeurs de Δ, h, k et d'en déduire l'action de la lame sur une vibration elliptique. Dans tout autre cas, l'incertitude existant sur la valeur de Δ ne permet pas de tenir compte des faisceaux réfléchis; il faut alors soit les éliminer, soit les négliger. Cette dernière solution a seule été employée jusqu'à maintenant; les observations sont faites comme si cette lumière parasite n'existait pas, et l'on suppose pour les calculs que $\theta = \delta$, $h = 1$, $k = (1 - r)^2$; voyons l'ordre de grandeur des erreurs qui peuvent en résulter.

Posons $\theta = \delta + \varepsilon$ et remplaçons θ par cette valeur dans les formules (2) on en déduit facilement

$$(5) \qquad \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{2r \cos\Delta \sin\delta - r^2 \sin 2\delta}{1 - 2r \cos\Delta \cos\delta + r^2 \cos 2\delta},$$

La valeur de r étant petite, on peut développer tang ε h et $\frac{k}{(1-r)^2}$ suivant les puissances croissantes de r, on

obtient ainsi :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\varepsilon &= 2r\sin\delta\cos\Delta + r^2\sin 2\delta\cos 2\Delta + \ldots,\\ h &= 1 - 2r\sin\delta\sin\Delta\\ &\quad - r^2(\sin 2\delta\sin 2\Delta - 2\sin^2\Delta\sin^2\delta) + \ldots,\\ \frac{k}{(1-r)^2} &= 1 + 2r(\cos\delta\cos\Delta + \sin\delta\sin\Delta\cos 2\gamma_0)\\ &\quad + r^2(2\cos 2\delta\cos 2\Delta\\ &\quad + 2\sin 2\delta\sin 2\Delta\cos 2\gamma_0 + 1) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Soit dans le plan $uO\varphi$, p_0 le point représentatif de la vibration incidente (*fig.* 23) : s'il n'y avait pas de ré-

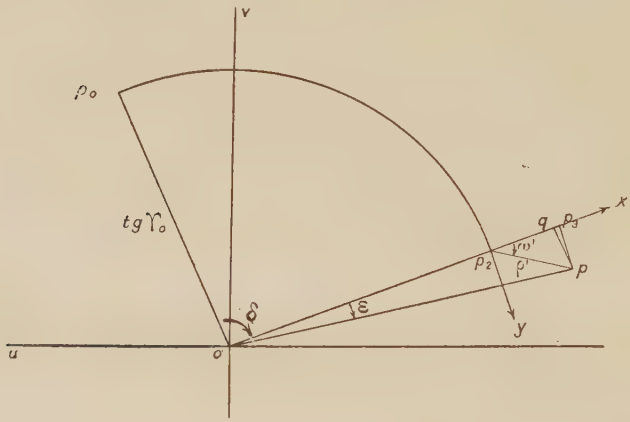

Fig. 23.

flexions, la vibration issue de la lame serait représentée par le point p_2 obtenu par une rotation $\widehat{p_0 o p_2} = \delta$; mais, par suite de la présence des faisceaux plusieurs fois réfléchis, le point représentatif est p qui peut se déduire de p_2 en prenant l'homothétique p_3 dans le rapport h et en faisant tourner p_3 d'un angle $\widehat{p_3 o p} = \varepsilon$.

Si l'on néglige les termes en r^2 les formules (6) montrent que

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{p_2 q} &= -2r\operatorname{tang}\gamma_0\sin\delta\sin\Delta,\\ \overline{qp} &= 2r\operatorname{tang}\gamma_0\sin\delta\cos\Delta, \end{aligned}\right.$$

tang γ_0 désigne le rayon $Op_0 = Op_2$ et les vecteurs $\overline{p_2 q}$ et $\overline{qp}$ sont comptés positivement dans les sens indiqués par les flèches. On en déduit que les coordonnées polaires du point p par rapport aux axes xp_2y sont

$$\rho' = 2r \operatorname{tang} \gamma_0 \sin \delta, \qquad \omega' = \frac{\pi}{2} + \Delta.$$

En résumé, si δ restant fixe, Δ varie, le lieu du point p est une courbe entourant p_2 qu'on peut, en première approximation, confondre avec un cercle décrit d'un mouvement uniforme du point p_2 comme centre avec un rayon égal à $2r \operatorname{tang} \gamma_0 \sin \delta$.

Revenons à la représentation sphérique; elle se déduit de la figure plane par une projection stéréographique de centre S; nous désignerons les éléments correspondants par les mêmes lettres, en réservant les majuscules à la figure sphérique. Le lieu des points P est une courbe entourant P_2; cette courbe étant petite, on peut considérer la figure formée par l'ensemble des points P et du point P_2 comme plane et semblable à la figure correspondante du plan $uO\varphi$, le rapport de similitude étant $\frac{SP_2}{Sp_2}$. Il en résulte que lorsque Δ varie, le point P décrit d'un mouvement uniforme un cercle de centre P_2 et de rayon

$$R = 2r \operatorname{tang} \gamma_0 \sin \delta . \frac{SP_2}{Sp_2}.$$

Dans les triangles rectangles OSP_2 et OSp_2, on a

$$SP_2 = \cos \gamma_0, \qquad Sp_2 = \frac{1}{\cos \gamma_0},$$

et, par suite

$$R = r \sin \delta \sin 2\gamma_0.$$

Ce rayon R donne l'erreur que l'on commet sur la forme de la vibration issue de la lame lorsqu'on néglige les faisceaux réfléchis; sa grandeur est en première approxima-

tion indépendante de Δ et son orientation varie aussi rapidement que cet angle Δ.

Il faut remarquer que dans la formule précédente R est exprimé en longueur; le rayon de la sphère étant $\frac{1}{2}$, sa valeur exprimée en distance angulaire sur la sphère est double; elle peut atteindre 6^0 pour $r = \frac{1}{19}$, $\delta = 2\gamma_0 = 90^0$.

La troisième formule (6) montre que l'on commet également une erreur sur l'intensité de la vibration issue de la lame, en prenant la valeur $I_2 = I_0(1 - r)^2$ obtenue en négligeant les faisceaux réfléchis. L'intensité réelle est, en négligeant les termes en r^2,

$$I = I_2[1 + 2r(\cos\delta\cos\Delta + \sin\delta\sin\Delta\cos 2\gamma_0)];$$

le second membre est une fonction périodique de Δ qu'on peut mettre sous la forme

$$I = I_2\left[1 + 2r\sqrt{1 - \sin^2\delta\sin^2 2\gamma_0}\cos(\Delta - \tau)\right],$$

τ étant un angle indépendant de Δ défini par la relation

$$\operatorname{tang}\tau = \operatorname{tang}\delta\cos 2\gamma_0,$$

Lorsque Δ varie, δ restant fixe, l'intensité I oscille entre les valeurs extrêmes

$$I_2(1 \pm 2r\sqrt{1 - \sin^2\delta\sin^2 2\gamma_0}).$$

On voit que l'erreur possible sur l'intensité est maximum lorsque l'erreur sur la forme de la vibration est nulle et inversement.

Dans le cas particulier où la vibration P_0 est rectiligne $2\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = \alpha_0$, l'ellipticité de la vibration P_2 est donnée par la relation

$$\sin 2\beta_2 = \sin\delta\sin 2\gamma.$$

Donc

$$R = r\sin 2\beta_2,$$
$$I = I_2[1 + 2r\cos 2\beta_2\cos(\Delta - \tau)].$$

L'importance des faisceaux réfléchis ne dépend que de

la valeur de $2\beta_2$ et par suite, pour obtenir une vibration d'ellipticité donnée, à partir d'une vibration rectiligne, il est indifférent d'employer une lame cristalline plus ou moins épaisse. De même pour ramener une vibration elliptique à être rectiligne, il est équivalent au point de vue de la lumière réfléchie d'utiliser un quart d'onde ou un compensateur de Brace.

B. — Application aux analyseurs.

Il est facile maintenant de faire l'application des résultats précédents au problème de l'étude des vibrations elliptiques, et de voir pour chaque analyseur particulier les erreurs occasionnées par les faisceaux lumineux réfléchis plusieurs fois sur les faces des lames cristallines; nous allons en donner quelques exemples.

Système de plages. — Considérons un analyseur rectiligne formé d'un nicol, précédé d'une lame demi-onde ne couvrant que la moitié du champ. Pour cette lame $\sin\delta = 0$, la lumière réfléchie n'a aucun effet sur l'état de polarisation du faisceau issu de la lame, mais son intensité

$$I = I_0 \frac{(1-r)^2}{1 + 2r\cos\Delta + r^2}$$

peut varier entre les limites extrêmes I_0 et $I_0\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2$.

Soient P et C les points de la sphère représentant la vibration arrêtée par le nicol et la ligne neutre voisine de la lame demi-onde; A la vibration rectiligne incidente d'intensité I_0; elle est transformée par la lame en une vibration A′ d'intensité I; la condition d'égalité d'éclat définit le point A par la relation

$$\sqrt{\frac{I}{I_0}} = \frac{AP}{A'P} = \frac{CP - CA}{CP + CA}.$$

Suivant la valeur de Δ, CA peut varier entre les limites o et r.CP; le point A sera donc compris entre C et D tel que CD $= r$.CP.

L'incertitude sur la position de A est proportionnelle à l'angle des plages; si l'on suppose cet angle de 2°, $\widehat{CP} = 2°$ en prenant pour r la valeur correspondant au quartz, on trouve $\widehat{CD} = 10'$.

Pour qu'une telle erreur puisse se produire, il faut : 1° que la valeur de Δ soit bien définie, ce qui exige l'emploi d'une lame nue avec une lumière monochromatique; 2° qu'elle soit susceptible de changer lorsqu'on tourne l'analyseur, ce qui peut arriver lorsque l'axe de rotation n'est pas bien parallèle à l'axe du faisceau lumineux.

Si la lame demi-onde est collée entre deux verres protecteurs qui recouvrent le champ entier, les intensités des deux parties du faisceau lumineux sont affectées par les réflexions sur les faces extérieures de ces glaces; mais la valeur de Δ étant mal définie, on observe dans les deux cas une intensité moyenne et les différences possibles entre ces deux moyennes sont inappréciables; l'égalité a lieu lorsque la direction de la vibration incidente A est confondue avec l'axe C de la lame demi-onde.

Des discussions analogues conduisent aux mêmes résultats pour les systèmes de plages équilibrés qui servent généralement à l'étude des vibrations elliptiques. Pour qu'une erreur appréciable soit possible, il faut que, pour certaines lames formant le système de plages, la valeur de Δ soit bien définie et susceptible de changer d'un pointé à l'autre. On évitera toute cause d'erreur en n'employant jamais de lames nues; si l'on veut éviter les effets de trempe provoqués par le collage, on peut monter le système de plages dans une cuve pleine d'un liquide de même indice que les lames biréfringentes utilisées. Ce dispositif présente en outre l'avantage de diminuer les

pertes de lumière par réflexion, dans le cas où plusieurs lames sont successivement traversées par le faisceau et d'augmenter la finesse de la ligne de séparation des différentes plages en diminuant les phénomènes de diffraction qui sont gênants lorsqu'on est obligé d'utiliser un faisceau de très faible ouverture.

Compensateur. — Les erreurs produites par les faisceaux réfléchis sur les faces du compensateur peuvent être beaucoup plus importantes. Pour en faire l'étude, nous supposerons le système de plages équilibré, nous négligerons la lumière réfléchie sur les lames qui le composent et nous admettrons toujours que le faisceau incident possède un état de polarisation unique [1].

Examinons d'abord le cas où la lame compensatrice est utilisée nue en lumière monochromatique; la valeur de Δ est la même pour tous les rayons du faisceau lumineux et l'action du compensateur est bien définie par les trois quantités θ, h, k.

L'égalité d'éclat des plages est obtenue lorsque la vibration incidente est ainsi transformée en la vibration rectiligne A_0 définie par le système de plages; la transformation inverse $-\theta$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, appliquée à A_0, donne la vibration incidente A; si l'on connaît ces quantités, il sera possible de déduire l'état de polarisation du faisceau incident des positions du compensateur et du système de plages : il suffit d'appliquer les formules générales (3) et (4); les calculs se simplifient considérablement dans ce cas particulier, la vibration A_0 étant rectiligne.

En outre de la connaissance de δ cette méthode exige

---

[1] Si l'appareil qui produit la vibration incidente comporte des lames cristallines, on devra éliminer les faisceaux réfléchis sur les faces de ces lames par un procédé analogue à celui que nous indiquerons plus loin à propos du compensateur.

celles de Δ et de r, ce qui est une complication et peut devenir une source d'erreur, si Δ varie d'un pointé à l'autre; aussi son emploi serait difficile et elle n'a jamais été utilisée: On calcule généralement la position de A en faisant $\theta = \delta$, $h = 1$; nous avons vu l'erreur qui en résulte, elle se traduit sur la sphère représentative par le rayon du cercle précédemment étudié. Si l'on désigne par 2α, 2β les coordonnées de la vibration étudiée, sa grandeur est en première approximation $R = r \sin 2\beta$, son orientation dépend de Δ et, par suite, elle peut porter aussi bien sur la direction des axes que sur l'ellipticité. Cette erreur est considérable. Voici pour une lame de mica les valeurs correspondantes de 2β et de R exprimées en distance angulaire sur la sphère :

2β.....	1°	5°	20°	45°	90°
R.....	$6'\frac{1}{2}$	0°32′	2°2′	4°19′	6°6′

Remarquons que, dans ce cas, le faisceau sortant du compensateur a un état de polarisation unique; par suite, il sera possible d'obtenir l'extinction complète des différentes plages et l'erreur de pointé sera la même que si les faisceaux réfléchis n'existaient pas; avec une source monochromatique assez intense, l'incertitude provenant du pointé correspond sur la sphère à une distance angulaire de 1′; il est donc nécessaire de supprimer l'erreur précédente beaucoup plus considérable.

Supposons maintenant qu'on utilise un compensateur recouvert de glaces à faces parallèles et une source lumineuse comprenant une petite portion de spectre continu. La valeur de Δ peut varier d'un grand nombre de circonférences et l'on peut admettre que l'intensité lumineuse des rayons pour lesquels Δ est compris entre deux valeurs voisines Δ_1, Δ_2 est proportionnelle à l'intervalle $\Delta_2 - \Delta_1$ Le faisceau issu du compensateur est représenté par une

circonférence de rayon R entourant le point X_0 qui représenterait la vibration sortante s'il n'y avait pas de lumière réfléchie, ou, plus exactement, si l'on admet que δ varie en même temps que la longueur d'onde, par des spires qui sont d'autant plus nombreuses et plus serrées les unes contre les autres que l'épaisseur de la lame avec ses verres protecteurs est plus grande.

Nous avons vu (Cf. p. 85) qu'un tel faisceau se comporte pour le système de plages comme s'il était représenté par un point G, centre de gravité de la courbe précédente, à condition d'ajouter sur toute l'image rétinienne une quantité de lumière constante. L'hypothèse faite sur la répartition de l'intensité totale du faisceau incident entre les différentes valeurs de Δ permet de calculer la position du centre de gravité de cette courbe;sans entreprendre ce calcul, on voit que les différents arcs symétriques par rapport à X_0 s'équilibrent en première approximation, et par suite, la distance GX_0 est de l'ordre de Rr et l'intensité de la lumière parasite est voisine de IR^2, I étant l'intensité du faisceau sortant du compensateur.

L'erreur systématique GX_0 est beaucoup moins considérable que dans l'exemple précédent, mais il est impossible d'obscurcir complètement une plage; la commodité et la précision des observations se trouvent diminuées.

En modifiant un peu la théorie faite à propos d'un système de deux plages, il est facile d'obtenir l'expression de la sensibilité dans ce cas. Je ne ferai ni ce calcul, ni celui de la distance exacte GX_0, car les résultats précédents reposent sur l'hypothèse que le faisceau principal interfère avec les faisceaux plusieurs fois réfléchis et dans le cas d'une lame recouverte de verres dont les surfaces ne sont pas parfaitement planes, il est douteux que les phénomènes soient aussi réguliers que le suppose cette théorie.

Autre hypothèse. — On peut partir de l'hypothèse opposée : les rayons réfléchis n'interfèrent pas avec le faisceau principal. Soient X le faisceau incident d'intensité I; C le point représentant l'une des lignes neutres du compensateur ; les faisceaux issus de la lame sont représentés par les points X_1, X_2, X_3, ... obtenus par les rotations δ, 3δ, 5δ de X effectuées autour de C, et les intensités correspondantes sont

$$I_1 = I(1-r)^2, \qquad I_2 = r^2 I_1, \qquad I_3 = r^4 I_1 \ldots;$$

cet ensemble se comporte comme s'il était représenté par le centre de gravité G de ces points, avec une intensité $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$, à condition d'ajouter un éclairement uniforme correspondant à l'intensité

$$I_1 \overline{GX_1}^2 + I_2 \overline{GX_2}^2 + \ldots,$$

Ne tenons compte que des faisceaux 1 et 2 et faisons la figure dans le cas ou X_1 est rectiligne (*fig.* 24). Soit G

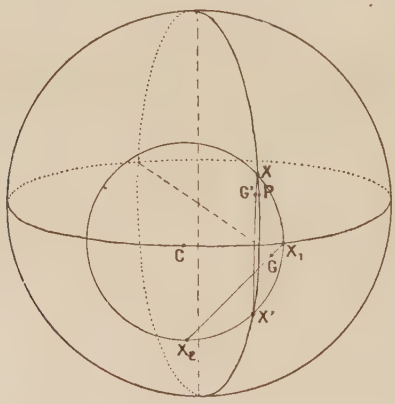

Fig. 24.

le centre de gravité des points X_1 X_2 affectés des masses I_1 et I_2; si nous effectuons la rotation $-\delta$, X_1 vient en X, X_2

en X′ symétrique de X par rapport au plan de l'équateur, G vient en G′ tel que $\frac{G'X}{G'X'} = r^2$ et l'intensité de la lumière parasite est

$$I' = I_1\left(\overline{G'X}^2 + r^2\,\overline{G'X'}^2\right).$$

En appelant toujours β l'ellipticité de la vibration incidente, on a

$$XX' = \sin 2\beta,$$

d'où l'on déduit

$$G'X = r^2 \sin 2\beta, \qquad I' = I_1 r^2 \sin^2 2\beta.$$

Si P est le point de la sphère sur le rayon de G′ l'erreur est mesurée par le segment XP; on voit qu'elle porte uniquement sur l'ellipticité. Il est facile de calculer la distance angulaire des points P et X; pour des valeurs assez faibles de 2β on peut admettre que $PX = G'X$; la distance angulaire des deux points P et X est par suite $2r^2 \times 2\beta$. En prenant pour r la valeur correspondant au mica, on trouve que l'erreur relative sur l'ellipticité est $\frac{1}{175}$.

Il est remarquable qu'au point de vue du problème de l'étude des vibrations elliptiques, les deux hypothèses opposées que nous venons d'étudier conduisent à des conclusions analogues : même quantité de lumière parasite; erreurs du même ordre; dans l'un ou l'autre cas, l'erreur relative sur la mesure de l'ellipticité est de l'ordre de $\frac{1}{100}$. L'expérience vérifie bien que, lorsqu'on cherche à analyser une vibration elliptique à l'aide d'un compensateur recouvert de glaces à faces parallèles, il est impossible d'observer des plages parfaitement noires et l'intensité de la lumière parasite croît en même temps que l'ellipticité du faisceau incident; c'est cette constatation qui a été le point de départ de cette étude.

Vérification expérimentale. — On peut se demander

si la théorie précédente est bien en accord avec l'expérience et si les faisceaux plusieurs fois réfléchis interfèrent, comme nous l'avons supposé, avec le faisceau transmis directement; il est facile de s'en convaincre. On produit une vibration elliptique, de préférence très renflée, en plaçant après un nicol une lame de mica d'épaisseur voisine de celle d'un quart d'onde, les lignes neutres de la lame étant orientées à 45° de la direction principale du polariseur. On a soin d'éliminer la lumière réfléchie sur les faces de cette lame, en la montant dans une cuve prismatique comme nous l'expliquerons plus loin.

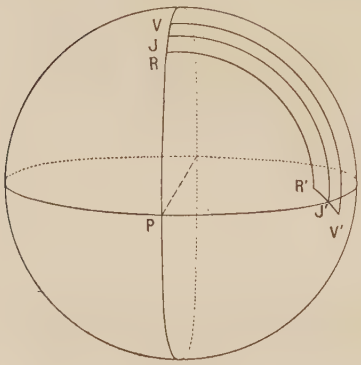

Fig. 25.

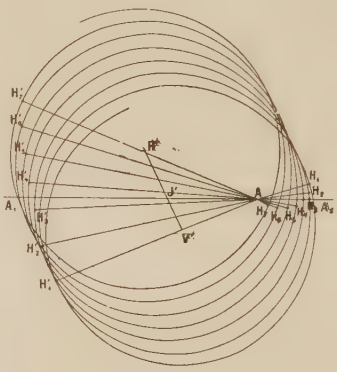

Fig. 26.

La source lumineuse utilisée étant un arc électrique, le point représentatif de la vibration issue de la lame change avec la couleur et décrit ainsi une portion RJV du méridien passant par le point P qui représente la vibration rectiligne produite par le polariseur (*fig.* 25). On reçoit ces vibrations elliptiques sur une lame en mica nu, quart d'onde pour une radiation visible J, qu'on a soin d'orienter de façon que l'une de ses lignes neutres soit parallèle à la direction principale du polariseur [1].

---

[1] Cette disposition est celle qu'on utiliserait pour mesurer

Si les réflexions sur les faces de cette lame n'exitaient pas, le faisceau sortant serait représenté par une petite portion de courbe R′ J′ V′ coupant l'équateur en J′; mais, d'après la théorie précédente, on doit substituer à cette courbe un ensemble de spires (*fig.* 26) et le point M représentant la vibration de longueur d'onde λ décrit une spire lorsque λ varie de $3^{\mu\mu}$ environ. Plaçons ensuite un nicol analyseur et observons le faisceau sortant dans un spectroscope. Soit A le point représentatif de la vibration rectiligne arrêtée par l'analyseur; si i est l'intensité de la radiation de longueur d'onde λ et M le point représentatif; l'intensité reçue dans le spectroscope est $i\overline{AM}^2$; par suite, en supposant que la source lumineuse est continue et que M décrit les spires d'un mouvement uniforme lorsque λ varie, l'intensité lumineuse du spectre observé doit passer par des minima, lorsque le point M est confondu avec les points H_1, H_2, H_3, ... pieds des perpendiculaires abaissées de M sur les spires et des maxima pour les points H'_1, H'_2, H'_3, ...

On observe bien dans le spectroscope un spectre cannelé, et la distance de deux franges noires correspond environ à un intervalle de $3^{\mu\mu}$. Ces franges sont plus nettes et ont des minima obscurs pour deux positions de l'analyseur, ce sont les positions A_1 et A_2; on constate bien, comme le montre la figure, que les parties noires de l'une de ces positions correspondent aux parties brillantes de l'autre. La figure montre que si l'on tourne l'analyseur de façon à passer de l'une de ces positions à l'autre, les points H_1 et H_7, correspondant à deux radiations de part et d'autre de la couleur pour laquelle la lame est quart

---

la biréfringence de la première lame par la méthode du quart d'onde. L'expérience que nous décrivons est donc une preuve directe des erreurs qui peuvent résulter des réflexions sur les faces du compensateur dans l'application de cette méthode.

d'onde, se déplacent en tournant en sens inverse; au contraire, le point H_3 reste fixe.

Conformément à la théorie, on constate bien que lorsqu'on passe de l'une de ces positions à l'autre, le déplacement des franges se fait en sens inverse de part et d'autre d'une certaine radiation pour laquelle on voit une frange naître ou s'effacer sur place. Cet aspect est très sensible et permet facilement de déterminer la radiation pour laquelle la lame est exactement quart d'onde; cette radiation est ainsi obtenue à $1^{\mu\mu}$ ou $2^{\mu\mu}$ près.

Si l'on remplace la lame de mica nue précédente par une lame recouverte de verres minces, de couvre-objets par exemple, on observe encore des franges si l'on a soin d'utiliser un faisceau assez parallèle et de former une image de la lame sur la fente du spectroscope; mais, dans ce cas, les franges correspondent aux faisceaux réfléchis sur les faces extérieures des lamelles protectrices et apparaissent beaucoup plus serrées.

La théorie précédente est donc bien vérifiée par l'expérience; au point de vue du problème de l'étude des vibration elliptiques nous devons en retenir les conclusions suivantes :

1° *Les faisceaux réfléchis plusieurs fois sur les lames cristallines du système de plages ont un rôle relativement peu important, et les erreurs qu'ils peuvent occasionner deviennent négligeables si l'on a soin de coller ces lames entre des verres protecteurs ou de les immerger dans une cuve à faces parallèles pleine d'un liquide d'indice voisin.*

2° *L'influence de la lumière réfléchie sur les faces du compensateur est bien plus grande; elle ne dépend pas de l'ordre du compensateur, mais uniquement de l'ellipticité* β *de la vibration étudiée. Dans le cas le plus défavorable où le compensateur est utilisé nu avec une lumière monochromatique, l'erreur ainsi commise sur la position du point X*

représentant la vibration étudiée est mesurée sur la sphère par une distance angulaire égale à $2r \sin 2\beta$, *elle peut dépasser le dixième de l'angle* 2β. *Cette erreur devient presque vingt fois plus faible lorsque le compensateur est recouvert et que la source lumineuse comprend une petite portion de spectre continu; mais la sensibilité des observations est alors diminuée par un éclairement uniforme et constant des plages dont l'intensité est proportionnelle à* $\sin 2\beta$; *dans ces conditions, il est difficile d'obtenir la position de X avec une erreur inférieure au centième de l'angle* 2β.

Pour conserver aux appareils d'étude des vibrations elliptiques toute la précision des méthodes polarimétriques, il est nécessaire de se débarrasser des faisceaux réfléchis sur les faces du compensateur; ce résultat est obtenu facilement en plaçant la lame cristalline dans une petite cuve prismatique remplie d'un liquide de même indice.

C. — Construction d'un compensateur de mica.

Voici, à titre d'exemple, les procédés qui m'ont servi pour la construction et l'utilisation d'un compensateur quart d'onde en mica.

Des lames minces sont facilement obtenues en clivant des plaques de mica rose du Brésil; elles ne sont pas toujours d'épaisseur uniforme sur toute leur étendue, mais le passage d'une couche de clivage à une autre s'effectue brusquement et, lorsqu'on examine ces lames éclairées par la flamme d'un brûleur à sodium, on aperçoit par réflexion des franges de lames minces dont les brisures dessinent les escaliers ainsi formés; par ce procédé, on peut choisir des surfaces d'épaisseur rigoureusement uniforme. L'examen des teintes au Norremberg donne une première indication de cette épaisseur; si elle est convenable, la lame est conservée et, par le procédé indiqué précédemment, on détermine la

radiation pour laquelle elle est quart d'onde. Les lames sont ainsi classées et rangées, celles qu'on désire utiliser sont alors disposées dans une cuve contenant un liquide de même indice.

J'ai mesuré pour la radiation jaune du sodium, les indices de l'échantillon de mica utilisé avec un réfractomètre à demi-boule d'Abbe; j'ai trouvé :

$$n_g = 1,5998, \qquad n_m = 1,5948, \qquad n_p = 1,5613.$$

Le liquide employé était un mélange de sulfure de carbone et de benzine d'indice $n = 1,597$, voisin de $\frac{n_g + n_m}{2}$

La cuve est constituée par deux couronnes circulaires dont les faces planes font un petit angle α et deux disques plans B, B′, dont les faces font aussi un petit angle β. Toutes ces pièces sont taillées dans un même flint d'indice $N = 1,75$. La lame de mica est collée entre les deux couronnes et, après avoir mis le liquide, on applique les glaces terminales, en ayant soin de laisser une bulle d'air pour éviter les pressions dues aux dilatations. Les arêtes des quatre prismes A, A′, B, B′ sont disposées parallèlement (perpendiculaires au plan de la figure) (*fig.* 27).

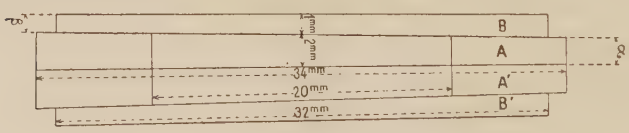

Fig. 27.

Les angles α et β ont été choisis de façon à ce que l'ensemble forme un petit prisme à vision directe, ce qui donne la condition

$$(n-1)\alpha = (N-1)\beta, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4}.$$

Il est facile de voir que, dans ces conditions, tous les faisceaux deux fois réfléchis sont déviés; le plus important

est celui qui se réfléchit sur les deux faces extérieures; c'est aussi le moins dévié; il fait avec le faisceau principal un angle $\delta = 4(\alpha - \beta)$; en s'imposant la condition $\delta = 0{,}012$ on obtient

$$\alpha = 0{,}015 = 51'34'', \qquad \beta = 0{,}012 = 41'15''.$$

Avant de laisser sécher le collage, on vérifie que le prisme est bien à vision directe, et si cette condition n'est pas exactement réalisée, on peut la rétablir par exemple en tournant un peu les faces B, B′ comme on le fait dans un diasporamètre.

Dans un premier essai [1], les glaces B, B′ avaient été choisies à faces parallèles et le faisceau principal était dévié, ce qui rend beaucoup moins commode l'usage du compensateur. Pour obtenir un prisme à vision directe, le verre doit avoir un indice assez différent de 1,6. Afin d'éviter la biréfringence des glaces, j'ai employé du flint soigneusement recuit d'indice 1,75. Pockels [2] a montré qu'un tel verre est peu biréfringent par tension ou compression. Dans un autre essai, je me suis servi de flint plus dense encore, d'indice 1,79; mais ce verre est jaune et se tache très facilement. Je crois qu'il serait possible d'obtenir de bons résultats avec du crown ordinaire bien recuit en ayant soin de prendre galets et couronnes dans la même masse de verre; on aurait ainsi l'avantage de diminuer la perte de lumière par réflexion. En tout cas, la biréfringence des glaces n'est que de quelques minutes et, si elle est régulière, il est possible d'éliminer ses effets par le choix de la méthode d'observation.

Nous avons vu que le faisceau lumineux reçu par l'analyseur est limité par deux diaphragmes, l'un S est placé dans le plan du système de plages, l'autre S′ se

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. CLIV, 1912, p. 271.

(2) F. Pockels, *Drude's Ann. der Phys.*, t. VII, 1902, p. 763.

trouve à l'infini ou près du polariseur. Le compensateur voisin de S donne de S′ plusieurs images virtuelles S″, S‴, ... formées par le faisceau direct et les faisceaux plusieurs fois réfléchis. La première de ces images S″ est confondue avec S′ si le prisme est à vision directe; elle est complètement séparée des autres, lorsque le diamètre apparent de S′ vu du compensateur est inférieur à 0,012; on sait qu'il en est toujours ainsi dans le cas de l'observation visuelle. La lunette d'observation donne alors de S″, S‴, ... des images réelles et distinctes qui doivent être dans le plan du cercle oculaire; un petit diaphragme placé en cet endroit ne laissera pénétrer dans l'œil que les rayons qui ont traversé directement le compensateur.

Il faut remarquer que si la vibration elliptique étudiée est produite par une lame biréfringente, on doit également éviter la lumière réfléchie sur ses faces. On arrive à ce résultat de la même façon en immergeant cette lame dans une cuve prismatique, cette cuve est placée immédiatement après le polariseur et donne de l'objet virtuel S plusieurs images réelles; la séparation des faisceaux réfléchis s'obtient par le diaphragme situé dans le plan du système de plages.

Lorsque toutes ces précautions ont été prises, il est possible d'obscurcir complètement les images des différentes plages et la sensibilité des observations reste la même quelle que soit l'ellipticité de la vibration incidente.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DU CHAMP D'UN CONDENSATEUR PLAN.

La mesure absolue de la constante de Kerr d'un liquide nécessite la connaissance exacte du champ électrique en tous les points traversés par le faisceau lumineux.

Le champ est déterminé par la forme et les dimensions du condensateur et par la différence de potentiel maintenue entre ses armatures; sa connaissance exige donc :

1° Le calcul de la fonction qui relie ces différentes grandeurs;

2° La mesure des dimensions géométriques du condensateur;

3° La mesure du potentiel;

Ce sont ces trois questions qui sont étudiées successivement dans ce Chapitre.

A. — Problème de Dirichlet. Correction de longueur.

Considérons un condensateur formé de deux plateaux plans et parallèles de longueur l, largeur h, épaisseur e, placés dans une cuve de longueur L (*fig.* 28). Les surfaces en regard sont à la distance d et maintenues à des potentiels $-\frac{V_0}{2}$ et $+\frac{V_0}{2}$. Le plan perpendiculaire à la figure passant par $x'x$ est, par raison de symétrie, la surface de potentiel o; il en résulte qu'en chaque point de $x'x$ le champ électrique H est parallèle à Oy. Si B désigne la constante de Kerr d'un liquide remplissant la cuve,

l'action électro-optique sur le rayon lumineux $x'x$ est

$$\frac{\delta}{\lambda} = B \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} H^2 dx ;$$

elle est égale à l'action théorique $BH_0^2\, l'$ d'un champ uniforme $H_0 = \frac{V_0}{d}$ agissant sur la longueur l'. Cette longueur ainsi définie est la longueur corrigée du condensateur;

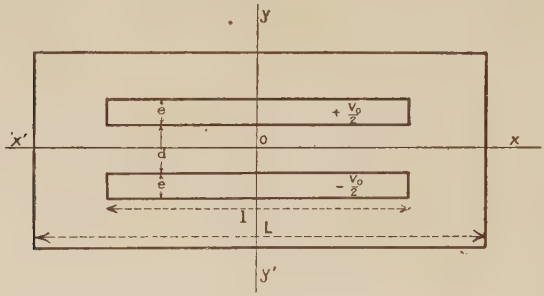

Fig. 28.

sa connaissance permet de calculer la constante de Kerr du liquide par la formule

$$\frac{\delta}{\lambda} = B \frac{V_0^2}{d^2} l',$$

analogue à la relation

$$\frac{\delta}{\lambda} = B \frac{V_0^2}{d^2} l,$$

qu'on considère ordinairement (*cf*, p. 10) en supposant le champ constant et égal à $\frac{V_0}{d}$ entre les armatures du condensateur et nul en dehors.

La longueur du condensateur ainsi corrigée, pour tenir compte de la non-uniformité du champ au voisinage des extrémités est définie par la relation

$$l' = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 dx;$$

elle ne dépend pas de la différence de potentiel établie entre les armatures, car si l'on multiplie par une constante cette différence de potentiel, H et H_0 sont à la fois multipliés par cette constante; c'est donc seulement une fonction des dimensions géométriques du condensateur. Cette fonction peut se calculer dans le cas de certaines formes simples; d'autre part, il est possible de déterminer expérimentalement la correction de longueur; nous aurons donc ainsi un moyen de contrôle des calculs théoriques et l'expérience montrera jusqu'à quelles limites un condensateur réel satisfait aux hypothèses simplificatrices qu'on est obligé de faire pour l'achèvement des calculs.

Calcul de la correction. — Le principe de la méthode a été indiqué par Maxwell (1) et généralisé par Kirchhoff (2) et Potier (3) au moyen d'un théorème donné par Schwarz(4) et Christoffel (5). J.-J. Thomson (6) en a fait des applications nombreuses à des calculs de capacité. Lemoine (7) seul a calculé la correction de longueur d'un condensateur servant à des recherches électro-optiques. La formule qu'il indique est approchée et il n'a pas fait la discusion des cas où son application est légitime; c'est pourquoi je crois utile de reprendre la question.

---

(1) Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*; traduction française, t. I, Chap. XII, p. 336-372.

(2) Kirchhoff, *Zur Theorie des Condensators* (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 101-117).

(3) Potier, *Note sur l'électromètre absolu*; traduction française du Traité de Maxwell, t. II, p. 563-588.

(4) Schwarz, *Ueber Einige Abbildungsaufgaben. Journal de Crelle*, t. 70, 1869, p. 105-120.

(5) Christoffel, *Sul problema delle temperature stazionarie Annali di Matematica*, t. I, 1867, p. 89.

(6) J.-J. Thomson, *Recent Researches in Electricity and Magnetism*, p. 208-250.

(7) J. Lemoine, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXII 1896, p. 836.

Supposons que, dans la partie du champ électrique voisine du plan xOy les surfaces de tous les conducteurs soient engendrées par des droites parallèles à l'axe Oz perpendiculaire au plan de la figure et que les parties du champ où il cesse d'en être ainsi soient assez éloignées pour qu'on puisse négliger leur action électrique; il en résulte que, dans la partie voisine du plan de la figure, l'électricité se distribue uniformément tout le long des génératrices et le potentiel est une fonction de x et y seulement. L'équation de Laplace se réduit à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Le problème de l'équilibre électrique peut s'énoncer comme il suit : Étant donné un espace continu à deux dimensions, limité par des courbes fermées c_1, c_2, ..., trouver la forme d'une fonction V, telle que sur ces limites, elle prenne les valeurs V_1, V_2, ... et que, dans l'étendue de cet espace, V soit fini, continu, n'ait en chaque point qu'une valeur unique et satisfasse à l'équation précédente.

La résolution de ce problème est souvent facilitée par l'usage des fonctions conjuguées. Soit $\gamma = \beta + i\alpha$ une quantité imaginaire, fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$; on sait que β et α sont des fonctions réelles de x et y satisfaisant aux relations

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial y} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0,$$

si l'on pose

$$V = V_0 + k\alpha;$$

V satisfait à l'équation de Laplace et les courbes $\alpha =$ const.

sont les courbes équipotentielles; les courbes orthogonales $\beta =$ const. sont les lignes de force.

Tout revient à déterminer la fonction $\gamma = f(z)$ telle que les courbes $c_1, c_2, \ldots$ soient les courbes de potentiel $V_1, V_2, \ldots$. La connaissance de cette fonction permettra de calculer le champ en chaque point

$$H_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k\frac{\partial \alpha}{\partial x} = k\frac{\partial \beta}{\partial y},$$
$$H_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -k\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -k\frac{\partial \beta}{\partial x},$$

et, par suite, on pourra former l'intégrale $\int H^2\,dx$ le long d'un chemin quelconque.

Supposons en particulier que l'axe $y = 0$ soit une courbe équipotentielle et posons

$$\alpha(x, 0) \equiv \alpha_0, \qquad \beta(x, 0) \equiv \beta_0(x),$$

α_0 est une constante, β_0 une fonction de x seulement. Le champ électrique en un point de $x'x$ est parallèle à Oy et a pour valeur

$$H = -k\frac{d\beta_0}{dx}.$$

Pour obtenir l'effet électro-optique sur le rayon lumineux $x'x$, il suffit de calculer l'intégrale

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} k^2 \left(\frac{d\beta_0}{dx}\right)^2 dx = k^2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta_0}{dx}\,d\beta_0.$$

Le théorème de Schwarz et Christoffel donne une méthode générale pour déterminer la fonction $y = f(z)$ lorsque la section du condensateur par le plan des xy est polygonale.

Exemple I. — Considérons la distribution électrique représentée par les relations

$$z = A(\gamma + e^{\gamma}), \qquad V = k\alpha.$$

On a

$$x = A(\beta + e^{\beta}\cos\alpha),$$
$$y = A(\alpha + e^{\beta}\sin\alpha).$$

Pour $\alpha = 0$,

$$\left.\begin{aligned} x &= A(\beta + e^{\beta}) \\ y &= 0 \end{aligned}\right. \qquad V = 0.$$

L'axe $x'x$ est la courbe de potentiel nul.

Pour $\alpha = \pi$

$$\left.\begin{aligned} x &= A(\beta - e^{\beta}) \\ y &= A\pi \end{aligned}\right. \qquad V = k\pi.$$

Lor que β varie de $-\infty$ à $+\infty$, x croît de $-\infty$ à la valeur $-A$ obtenue pour $\beta = 0$, puis décroît de $-A$ à $-\infty$. La demi-droite MN limitée en N est la courbe de potentiel $k\pi$. En prenant les valeurs de α comprises entre 0 et π, on obtient toutes les courbes équipotentielles dans le cas d'un plateau MN limité en N au potentiel $k\pi$ placé en regard d'un plateau $x'x$ illimité et maintenu au potentiel 0 (*fig.* 29).

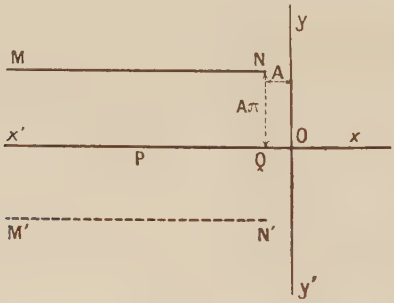

Fig. 29.

Si l'on fait varier de α de $-\pi$ à $+\pi$, on a le cas de deux demi-plateaux MN, M'N' aux potentiels $k\pi$ et $-k\pi$.

C'est un cas particulier du condensateur considéré au début; la cuve est illimi ée dans tous les sens, la longueur des plateaux est infinie dans un seul sens, leur épaisseur

nulle, la distance qui les sépare $d = 2\,A\pi$ et la différence de potentiel $V_0 = 2\,k\pi$.

La fonction $\beta_0(x) = \beta\,(x, 0)$ est donnée par la relation

$$x = A\,(\beta + e^{\beta}) \quad \text{où} \quad A = \frac{d}{2\pi}.$$

Par application des formules données précédemment, on trouve que le champ au point (x, o) de l'axe des x est

$$H = H_0 \frac{1}{1 + e^{\beta}}, \qquad H_0 = -\frac{V_0}{d},$$

et la longueur équivalente à l'action du condensateur sur le rayon lumineux parcourant l'axe des x du point P (x, β) au point à l'infini dans la direction Ox est

$$l' = A \log \frac{1 + e^{\beta}}{e^{\beta}}.$$

On peut remarquer que lorsque le point P s'éloigne à l'infini dans la direction Ox, l' augmente indéfiniment. La longueur parcourue par le rayon lumineux entre les armatures du condensateur

$$l = -x - A = -A\,(1 + \beta + e^{\beta})$$

croît aussi indéfiniment, mais la différence

$$l' - l = A\,[1 + e^{\beta} + \log(1 + e^{\beta})]$$

tend vers A lorsque le point P s'éloigne dans la direction Ox'. Pour nous rendre compte de l'action d'un tel condensateur, formons le Tableau des valeurs de $\frac{x}{A}$, de $\frac{H_0}{H}$, de $\frac{l'}{A}$ et de $\frac{l' - l}{A}$ pour les différents points P correspondants aux valeurs de β en progression arithmétique, la raison étant l'inverse du module : $\frac{1}{M} = 2.302585$.

β.	e^{β}.	$\frac{x}{A}$.	$\frac{H_0}{H}$.	$\frac{l'}{A}$.	$\frac{l'-l}{A}$.
$\frac{3}{M}$	10^3	$10^3+\frac{3}{M}$	10^3+1	$\log\left(1+\frac{1}{10^3}\right)$	$''$
$\frac{2}{M}$	10^2	$10^2+\frac{2}{M}$	10^2+1	$\log\left(1+\frac{1}{10^2}\right)$	$''$
$\frac{1}{M}$	10	$10+\frac{1}{M}$	$10+1$	$\log\left(1+\frac{1}{10}\right)$	$''$
0	1	1	$1+1$	$\log(1+1)$	$''$
$-\frac{1}{M}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{M}+\frac{1}{10}$	$1+\frac{1}{10}$	$''$	$1+\frac{1}{10}+\log\left(1+\frac{1}{10}\right)$
$-\frac{2}{M}$	$\frac{1}{10^2}$	$-\frac{2}{M}+\frac{1}{10^2}$	$1+\frac{1}{10^2}$	$''$	$1+\frac{1}{10^2}+\log\left(1+\frac{1}{10^2}\right)$
$-\frac{3}{M}$	$\frac{1}{10^3}$	$-\frac{3}{M}+\frac{1}{10^3}$	$1+\frac{1}{10^3}$	$''$	$1+\frac{1}{10^3}+\log\left(1+\frac{1}{10^3}\right)$
$-\frac{4}{M}$	$\frac{1}{10^4}$	$-\frac{4}{M}+\frac{1}{10^4}$	$1+\frac{1}{10^4}$	$''$	$1+\frac{1}{10^4}+\log\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$

Ce Tableau montre que lorsque le point P pénètre entre les armatures du condensateur, le champ et la correction de longueur prennent très rapidement leurs valeurs limites. Lorsqu'on est à une distance du bord égale à $\frac{4d}{3}\left(x=-\frac{4}{M}\right)$, H ne diffère de H_0 que d'environ $\frac{1}{10000}$ de sa valeur et la correction a atteint sa valeur limite à $\frac{1}{10000}$ près. Pour la distance

$$\frac{7d}{3}\left(x=-\frac{7}{M}\right),\quad H=H_0\left(1-\frac{1}{10^7}\right),\quad l'-l=A\left(1+\frac{2}{10^7}\right).$$

Il résulte de là que les calculs précédents peuvent s'appliquer à un condensateur fini dès que sa longueur est supérieure à trois ou quatre fois la distance des plateaux, car la perturbation de l'une des extrémités n'a plus alors d'influence sensible sur celle de l'autre. La longueur corrigée d'un tel condensateur est

$$l'=l+2A=l+\frac{d}{\pi}.$$

Nous retrouvons le premier terme de la correction indiquée par Lemoine, mais il faut remarquer que le cas théorique que nous venons d'étudier ne permet pas de calculer le terme suivant destiné à tenir compte de l'influence de la longueur, puisque nous avons supposé cette longueur infinie. Tout au plus, peut-on dire que cette influence doit être négligeable. En se reportant au Traité de Maxwell (traduction française, t. I, p. 365), on voit que les termes suivants du développement de Lemoine donnent la capacité d'une portion d'un condensateur illimité et ne concernent pas l'action d'un condensateur fini.

Le deuxième fait qui ressort de l'examen du Tableau précédent, c'est que, lorsque le point P s'éloigne du condensateur, le champ H diminue en raison inverse de l'abscisse de P et pour des distances assez grandes, on a approximativement $H = H_0 \frac{A}{x}$ et $l' = A \frac{A}{x}$. En pratique, les cuves employées ne sont pas illimitées et leur longueur L est souvent peu supérieure à la longueur l des électrodes. Par suite de la discontinuité qui se produit à la limite du diélectrique, il est certain que les formules précédentes ne représentent pas exactement le champ obtenu dans de telles cuves. On peut cependant supposer en première approximation que le champ n'est pas troublé (cette hypothèse serait exacte si la matière de la cuve et le milieu extérieur avaient même constante diélectrique que le liquide intérieur). Dans ces conditions, comme le milieu extérieur a, en général, une constante de Kerr négligeable vis-à-vis de celle du corps étudié, il suffit, pour tenir compte de la limitation de la cuve, de retrancher de la correction précédente, la longueur équivalente au parcours extérieur du rayon lumineux.

Le calcul se fait facilement avec les formules données plus haut, mais l'hypothèse que nous avons été obligés

de faire n'étant certainement pas exacte, il est préférable d'avoir des cuves dépassant notablement les électrodes et alors la longueur corrigée du condensateur peut se calculer par la formule approchée

$$l' = l + \frac{d}{\pi}\left(1 - \frac{d}{\pi(L - l)}\right).$$

Il reste encore à discuter l'influence de la largeur des plateaux du condensateur. Les calculs précédents sont faits en supposant cette largeur infinie, tandis, qu'en réalité, elle n'est que de quelques centimètres. L'erreur qui en résulte peut se décomposer en deux termes, l'un relatif à l'intérieur du condensateur, l'autre à l'extérieur. Lorsqu'on pénètre dans le condensateur perpendiculairement au plan de la figure, le champ prend sa valeur limite aussi vite que dans le sens de la propagation de la lumière; par suite, le terme correctif relatif au trajet du faisceau entre les armatures est négligeable dès que la largeur des électrodes est trois ou quatre fois leur distance.

Il n'en est pas de même pour le trajet extérieur aux électrodes, car ici le conducteur ne forme plus écran électrique et l'erreur relative sur le champ $\frac{\Delta H}{H}$ peut devenir beaucoup plus considérable. L'écart qui en résulte pour la biréfringence observée est, pour le trajet dl,

$$B(H + \Delta H)^2\, dl - BH^2\, dl = BH^2\left[2\frac{\Delta H}{H} + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2\right] dl;$$

le champ s'affaiblit rapidement lorsqu'on s'éloigne du condensateur, et ceci explique que l'erreur correspondante puisse également rester négligeable.

Exemple II. — Nous avons supposé jusqu'à maintenant que les plateaux étaient infiniment minces $e = 0$. Il semble évident que s'ils sont épais, de l'électricité se répandra sur leurs faces latérales; des lignes de force

partiront de ces masses électriques et la correction de longueur se trouvera augmentée.

La méthode de Schwarz permet de résoudre dans ce cas le problème de la distribution électrique. Supposons la quantité imaginaire $z = x + iy$ fonction de la variable complexe $t = u + iv$ définie par la relation

$$dz = \frac{K\sqrt{t^2 - 1}}{t - a}\, dt,$$

où a est une constante réelle plus grande que 1. L'intégration se fait facilement, en posant $\lambda = t + \sqrt{t^2 - 1}$ puis décomposant en fractions rationnelles, on obtient

$$z = K\left[\sqrt{t^2 - 1} + a \log(t + \sqrt{t^2 - 1}) - \sqrt{a^2 - 1} \log \frac{at - 1 + \sqrt{a^2 - 1}\sqrt{t^2 - 1}}{t - a}\right] + C.$$

La fonction z sera parfaitement déterminée et unique pour toutes les valeurs de $t = u + iv$ comprises à l'intérieur de l'aire ABCDEFGHKA (*fig.* 30), à condition de choisir, pour une des valeurs de t appartenant à cette aire, une des déterminations de la fonction précédente, et de suivre ensuite par continuité la valeur de z. Prenons pour t situé sur BA, c'est-à-dire pour t réel et plus grand que a la détermination

$$x = K\left[\sqrt{t^2 - 1} + a \log(t + \sqrt{t^2 - 1}) - \sqrt{a^2 - 1} \log \frac{at - 1 + \sqrt{a^2 - 1}\sqrt{t^2 - 1}}{t - a}\right]$$

$$y = 0,$$

où les signes $\sqrt{\ }$ et log ont leurs significations arithmétiques.

Il est facile de voir que, lorsque le point t décrit dans le plan des uv le contour ABCDEFGHKA, le point z décrit dans le plan des xy le contour correspondant

ABCDEFGHKA (*fig.* 31), où les points $z_1 = iK\pi\sqrt{a^2 - 1}$, $z_2 = iK\pi a$ correspondent aux points $t_1 = 1$ et $t_2 = -1$.

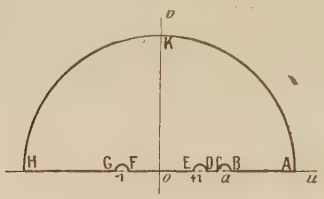

Fig. 30.

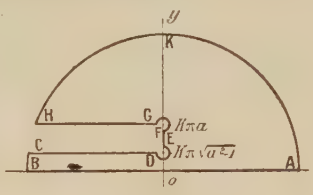

Fig. 31.

Considérons maintenant la quantité imaginaire $\gamma = \beta + i\alpha$ définie par la relation.

$$\gamma = \frac{V_0}{2\pi}\log(t - a);$$

elle sera définie pour toutes les valeurs de t appartenant à l'aire précédente, et unique en choisissant pour t réel et plus grand que a la détermination arithmétique

$$\beta = \frac{V_0}{2\pi}\log(t - a),$$
$$\alpha = 0.$$

En suivant les valeurs de γ par continuité, on voit que, pour t réel et inférieur à a, α est constant et égal à $\frac{V_0}{2}$. Posons $\alpha = V$, faisons tendre vers zéro les rayons des demi-cercles BC, DE, FG et augmentons indéfiniment le rayon de HKA, on voit que les lignes $\alpha =$ const. représentent les courbes équipotentielles et $\beta =$ const. les lignes de force dans le cas du champ créé par un plateau indéfini $x'x$ au potentiel o et un plateau MNRS (*fig.* 32) limité en NR au potentiel $\frac{V_0}{2}$, par raison de symétrie, c'est la même distribution que lorsqu'on a en présence deux demi-plateaux MNRS, M′N′R′S′ aux potentiels $+\frac{V_0}{2}$ et $-\frac{V_0}{2}$. Ce cas est analogue à l'exemple précédent,

mais les plateaux ne sont plus supposés infiniment minces.

Si d désigne leur distance et e leur épaisseur commune,

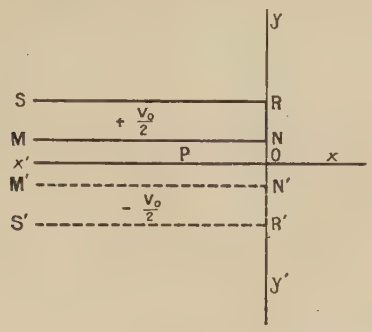

Fig. 32.

on devra déterminer les constantes K et a par les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} d = 2\pi K\sqrt{a^2-1}, \\ d + 2e = 2\pi K a. \end{cases}$$

L'axe $x'x$ est encore dans ce cas, la courbe de potentiel o et la fonction $\beta_0(x) = \beta(x, 0)$ est définie par les deux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} x = K\Big[\sqrt{t^2-1} \\ \qquad + a\log(t+\sqrt{t^2-1}) - \sqrt{a^2-1}\log\dfrac{at-1+\sqrt{a^2-1}\sqrt{t^2-1}}{t-a}\Big], \\ \beta = \dfrac{V_0}{2\pi}\log(t-a), \end{cases}$$

où t est un paramètre pouvant prendre toutes les valeurs de a à $+\infty$.

A tout point P de l'axe des x, on peut ainsi faire correspondre une valeur et une seule de chacune des trois quantités x, β et t. La valeur du champ en ce point P est

$$H = -\frac{d\beta}{dx} = -\frac{d\beta}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-V_0}{2\pi K\sqrt{t^2-1}},$$

ou

$$(3) \qquad H = H_0 \sqrt{\frac{a^2-1}{t^2-1}},$$

en posant

$$H_0 = -\frac{V_0}{d}.$$

La longueur équivalente à l'action du condensateur sur un rayon lumineux parcourant l'axe des x du point P au point à l'infini dans la direction Ox est

$$l' = \int_x^{+\infty} \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 dx = K(a^2-1)\int_t^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)\sqrt{t^2-1}}.$$

Cette intégration peut se faire par le changement de variable déjà employé, on obtient

$$l' = -K\sqrt{a^2-1}\left[\log\frac{at-1+\sqrt{a^2-1}\sqrt{t^2-1}}{t-a}\right]_t^{+\infty},$$

$$(4) \qquad l' = \frac{d}{2\pi}\left[\log\frac{at-1+\sqrt{a^2-1}\sqrt{t^2-1}}{t-a} - \log(a+\sqrt{a^2-1})\right].$$

Les formules (1), (2), (3), (4) résolvent entièrement le problème de l'action électro-optique d'un tel condensateur et la discussion s'achève comme dans l'exemple précédent. Lorsque le point P s'éloigne indéfiniment dans la direction des x négatifs, t tend vers a et l' augmente indéfiniment, mais la différence

$$l' - l = l' + x = \frac{d}{2\pi}\left[\sqrt{\frac{t^2-1}{a^2-1}} + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\log(t+\sqrt{t^2-1}) - \log(a+\sqrt{a^2-1})\right]$$

a pour limite

$$\frac{d}{2\pi}\left[1 + \frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2-1}}\log(a+\sqrt{a^2-1})\right]$$
$$= \frac{d}{2\pi}\left[1 + \frac{e}{d}\log\left(1+\frac{d}{e}\right)\right].$$

La discussion conduit à des résultats analogues à ceux de l'exemple précédent; dès que la longueur et la largeur du condensateur sont supérieures à trois ou quatre fois la distance des plateaux, on peut ajouter les perturbations des deux extrémités et calculer la longueur corrigée du condensateur par la formule

$$(5) \qquad l' = l + \frac{d}{\pi}\left[1 + \frac{e}{d}\log\left(1 + \frac{d}{e}\right)\right].$$

La correction de longueur est plus grande que ne l'indique la formule de Lemoine et peut atteindre le double. Voici un Tableau des différentes valeurs du coefficient

$$\left[1 + \frac{e}{d}\log\left(1 + \frac{d}{e}\right)\right] :$$

$\frac{e}{d}$.	$+\infty$.	10.	5.	2.	1.	0,5	0,2	0,1	0,05	0.
»	2	1,9531	1,9116	1,8109	1,6931	1,5493	1,3584	1,2398	1,1522	1

Si la différence $L - l$ entre la longueur de la cuve et celle des plateaux n'est pas très grande par rapport à la distance d des électrodes, on peut, comme dans l'exemple précédent, calculer un terme correctif avec les mêmes hypothèses, c'est-à-dire en supposant le champ non troublé et la constante de Kerr nulle en dehors de la cuve. La longueur corrigée est donnée par la formule

$$(6) \quad l' = l + \frac{d}{\pi}\left[1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right) - \log\frac{at-1+\sqrt{a^2-1}\sqrt{t^2-1}}{t-a}\right],$$

dans laquelle le paramètre t doit être remplacé par la valeur définie par la relation

$$(7) \quad L - l = \frac{d}{\pi}\left[\sqrt{\frac{t^2-1}{a^2-1}} + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) - \log\frac{at-1+\sqrt{a^2-1}\sqrt{t^2-1}}{t-a}\right].$$

Pour faciliter l'application numérique de ces formules, nous allons les transformer au moyen des fonctions hyperboliques. Il existe des Tables de ces fonctions qui permettent de faire les calculs. Je me suis servi des *Smithsonian Mathematical Tables.*

Remarquons que l'on a

$$\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)=\mathrm{ch}^{-1}a, \qquad \log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)=\mathrm{ch}^{-1}t,$$

$$\log\frac{at-1+\sqrt{a^2-1}\sqrt{t^2-1}}{t-a}=\mathrm{ch}^{-1}\frac{at-1}{t-a}.$$

Posons

$$a=\mathrm{cth}\,\alpha, \qquad t=\mathrm{cth}\,\theta,$$

$$\frac{at-1}{t-a}=\mathrm{cth}\,(\alpha-\theta),$$

$$\sqrt{a^2-1}=\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha}, \qquad \sqrt{t^2-1}=\frac{1}{\mathrm{sh}\,\theta},$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}=\mathrm{ch}\,\alpha=1+\frac{2e}{d}.$$

Les formules (6) et (7) deviennent

$$(8) \qquad \pi\frac{l'-l}{d}=1+\mathrm{ch}\,\alpha.\mathrm{ch}^{-1}\mathrm{cth}\,\alpha-\mathrm{ch}^{-1}\mathrm{cth}(\alpha-\theta),$$

$$(9) \qquad \pi\frac{\mathrm{L}-l}{d}=\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\theta}+\mathrm{ch}\,\alpha.\mathrm{ch}^{-1}\mathrm{cth}\,\theta-\mathrm{ch}^{-1}\mathrm{cth}(\alpha-\theta).$$

L'argument α s'obtient par la relation

$$\mathrm{ch}\,\alpha=1+\frac{2e}{d}.$$

La formule (9) permet alors de déterminer θ par approximations successives.

Si l'on pose

$$\mathrm{A}=\pi\frac{\mathrm{L}-l}{d}$$

et

$$\mathrm{F}(\theta)=\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\theta}+\mathrm{ch}\,\alpha.\mathrm{ch}^{-1}\mathrm{cth}\,\theta-\mathrm{ch}^{-1}\mathrm{cth}(\alpha-\theta),$$

on a

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\theta}=-\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\theta}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}(\alpha-\theta)}.$$

Cette forme simple de la dérivée est due à ce que la fonction F (θ) n'est autre chose que le produit par une constante de la fonction z définie au début par la relation

$$dz = \frac{K\sqrt{t^2 - 1}}{t - a}\,dt.$$

Il en résulte que la formule de Newton sera commode pour les approximations. On calculera les valeurs successives de θ par la relation

$$\theta_{n+1} = \theta_n + [F(\theta_n) - A]\left(\frac{\operatorname{sh}\theta_n}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2 \operatorname{sh}(\alpha - \theta_n).$$

Deux applications de cette formule sont en général suffisantes.

Lorsque la quantité A est supérieure à 10, on peut remarquer que le terme le plus important de F(θ) est $\frac{\operatorname{sh}(\alpha)}{\operatorname{sh}(\theta)}$; on pourra donc prendre la valeur initiale θ_0 donnée par la relation $A = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}\theta_0}$ et calculer les valeurs successives de θ par la formule

$$A = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{sh}\theta_{n+1}} + \operatorname{ch}\alpha . \operatorname{ch}^{-1}\operatorname{cth}\theta_n - \operatorname{ch}^{-1}\operatorname{cth}(\alpha - \theta_n)$$

qui est un peu plus simple que la formule de Newton.

Avec les formules précédentes, nous ne pouvons pas tenir compte de l'influence de la longueur ni de celle de la largeur du condensateur; mais, comme dans le premier exemple, l'erreur qui en résulte est sans doute négligeable dès que ces dimensions sont supérieures à trois ou quatre fois la distance des électrodes.

Vérifications expérimentales. — La correction de longueur d'un condensateur peut se déterminer expérimentalement de plusieurs façons. La quantité directement accessible est toujours la longueur corrigée du conden-

sateur et, par suite, il faudra la connaître avec une très grande précision pour obtenir la correction avec une erreur relative pas trop considérable. Cette grande précision est difficile à obtenir, car la détermination de la longueur corrigée repose sur des mesures de double réfraction électrique, et nous savons que ces mesures sont difficiles et souvent incertaines. Nous ne devrons donc pas nous attendre à trouver une bien grande exactitude pour ces vérifications expérimentales.

La première méthode, mise en œuvre par Mac Comb [1], repose sur l'emploi de plusieurs condensateurs de longueurs différentes l_1, l_2, ... et identiques pour toutes les autres dimensions. Si l'on admet que la correction est la même pour ces condensateurs, on a

$$l'_1 = l_1 + \varepsilon, \qquad l'_2 = l_2 + \varepsilon,$$

et les retards observés sont

$$\frac{\delta_1}{\lambda} = B\frac{V_0^2}{d^2}(l_1 + \varepsilon), \qquad \frac{\delta_2}{\lambda} = B\frac{V_0^2}{d^2}(l_2 + \varepsilon);$$

d'où

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{\lambda} = B\frac{V_0^2}{d^2}(l_1 - l_2);$$

cette dernière relation donne la valeur de B et, en portant dans les précédentes, on en déduit ε.

Mac Comb avait trois condensateurs de longueur 2^{cm}, 15^{cm} et 50^{cm}, la distance des électrodes est $0^{cm},175$. La correction trouvée est $0^{cm},18$; elle est bien supérieure à la valeur de 0,055 calculée par la formule de Lemoine. L'épaisseur des plateaux n'est pas donnée, mais on peut admettre qu'elle est supérieure à deux fois leur distance, ce qui donne pour la correction, une valeur théorique comprise entre $0^{cm},10$ et $0^{cm},11$; elle est encore inférieure à la valeur expérimentale, mais cette dernière peut être

[1] H.-E. Mac Comb, *Phys. Rev.*, t. XXIX, 1909, p. 532.

fausse, par suite de très faibles erreurs sur les mesures des potentiels et des distances des électrodes.

Dans son travail sur la double réfraction électrique des composés organiques, Leiser [1] s'est servi de la méthode de compensation de Des Coudres et il a déterminé expérimentalement la longueur corrigée de la cuve compensatrice pour différentes distances des électrodes.

Voici le principe de la méthode.

La distance des plateaux étant d_1, deux cuves auxiliaires sont réglées séparément de façon à obtenir la compensation pour cette distance d_1. On ajoute ensuite leur action, la distance des plateaux du compensateur doit être réduite à d_2. Si l_1, et l_2 désignent les longueurs corrigées correspondant aux distances d_1 et d_2, on doit avoir

$$\frac{l'_2}{d_2^2} = 2\frac{l'_1}{d_1^2},$$

$$\frac{l'_2}{l'_1} = \left(\frac{\sqrt{2}\,d_2}{d_1}\right)^2;$$

les mesures de d_2 et de d_1 donnent la valeur du rapport $\frac{l'_2}{l'_1}$ pour deux distances d_1 et d_2 qui sont à peu près dans le rapport $\sqrt{2}$.

En opérant ainsi de proche en proche, on détermine en valeurs relatives la longueur corrigée du condensateur pour des valeurs de d en progression géométrique. Avec ces points, Leiser construit une courbe et en interpolant, il en déduit un tableau des valeurs relatives de l' en fonction de la distance des électrodes.

D'autre part, Leiser donne en gros les dimensions de son appareil et, par suite, nous pourrons calculer à peu près la correction théorique. La cuve est un parallélipipède de $12^{cm} \times 12^{cm} \times 26^{cm}$; les plateaux ont environ $0^{cm},35$ d'épaisseur, 8^{cm} de large et 20^{cm} de long, leur distance

---

[1] R. Leiser, *Abh. Bunsen Gesellschaft*, n° 4, 1910, p. 26-31.

peut varier de 0^{cm} à 6^{cm}. Avec ces données, j'ai calculé les valeurs de la correction pour différentes distances des plateaux : 1° avec la formule (8); 2° avec la formule (5) qui suppose la cuve illimitée. Les résultats sont portés dans le Tableau suivant :

d.	l' rel.	l' obs.	l' calc.	$l'\infty$ cal.	α.	θ.
0,0	0,936	20,00	20,000	20,000	»	»
0,5	0,946	20,21	20,244	20,258	1,6094	0,0789
1,0	0,955	20,41	20,445	20,469	1,1232	0,0952
1,5	0,964	20,60	20,607	20,663	0,9320	0,1148
2,0	0,971	20,75	20,746	20,849	0,8140	0,1317
2,5	0,977	20,88	20,864	21,029	0,7319	0,1462
3,0	0,982	20,98	20,964	21,206	0,6705	0,1582
3,5	0,987	21,09	21,043	21,381	0.6224	0,1695
4,0	0,991	21,17	21,112	21,554	0,5833	0,1769
5,0	0,998	21,32	21,203	21,895	0,5232	0,1891

La première colonne donne en centimètres la distance des électrodes; la seconde, les valeurs relatives de l' prises dans le Tableau de Leiser; la troisième, la longueur corrigée du condensateur obtenue à partir des précédentes valeurs en supposant $l' = 20^{cm}$ pour $d = 0$; la quatrième, les valeurs théoriques de l' calculées par la formule (8); α et θ correspondants sont indiqués dans les colonnes 6 et 7 et enfin la cinquième donne les valeurs de l' calculées par la formule (5). Ces résultats ont servi à tracer les courbes de la figure 33; on y a joint la droite $l' = l + \frac{d}{\pi}$ qui représente le premier terme de la correction de Lemoine. Étant donnée la difficulté des mesures expérimentales, la concordance entre la courbe de Leiser et la courbe théorique déduite de la formule (8) est excellente. L'écart qui se produit dans la région $d = 1^{cm}$ est dû à l'incertitude de la détermination expérimentale. Quant à l'écart produit pour d supérieur à 3^{cm}, il est sans doute encore dans la limite des erreurs expérimentales; mais il peut s'expliquer facilement par l'une ou l'autre des hypothèses suivantes : 1° La réfraction des

lignes de force à la limite du diélectrique trouble le champ d'une façon appréciable lorsque $L - l < 2\,d$; 2° la longueur L est un peu supérieure à 26^{cm}. Leiser n'a donné cette valeur qu'à titre d'indication; 3° l'épaisseur e est un

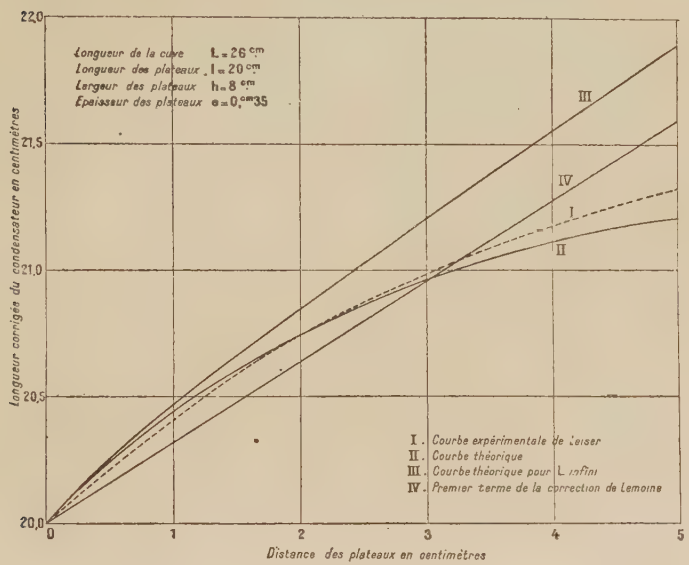

Fig. 33.

peu supérieure à $0^{cm},35$ ou, ce qui revient au même, les parties métalliques qui maintiennent les plateaux ont une influence qui ne devient sensible que lorsque e est petit par rapport à d. On peut cependant conclure que la formule (8) est applicable à un condensateur, lorsque toutes les quantités $L - l$, l et h sont supérieures au double de la distance des électrodes. Si on les prend supérieures à quatre fois cette distance, la formule (8) permet certainement le calcul de la correction avec une très grande approximation.

Les résultats de cette étude ne sont pas uniquement applicables aux recherches sur le phénomène de Kerr,

mais ils peuvent servir toutes les fois qu'on doit créer un champ connu au moyen d'un condensateur plan limité [1].

B. — Le condensateur. Mesures géométriques.

Le condensateur qui a servi à la mesure absolue de la constante de Kerr du sulfure de carbone a été construit sur mes indications par M. Werlein; je suis heureux de le remercier pour le grand soin qu'il a apporté à l'exécution de ce travail délicat.

Les armatures sont formées par deux plateaux métalliques verticaux A, A′ (*fig.* 34) de 20^{cm} de long, 5^{cm} de

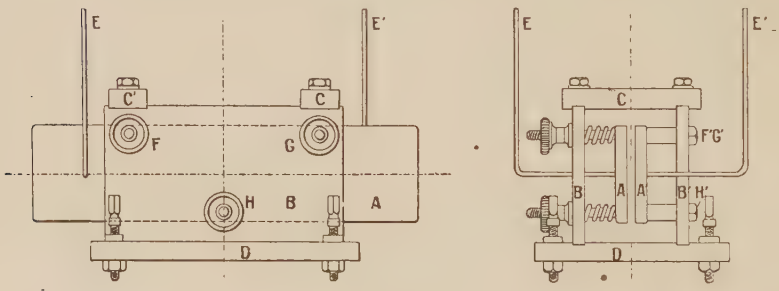

Fig. 34.

haut et $0^{cm},6$ d'épaisseur; ils sont fixés à deux plaques de laiton B, B′ maintenues à un écartement invariable par deux brides C, C′ et par une plaque D qui forme la base de l'appareil et repose sur le plan horizontal par quatre vis calantes. Les pièces C, C′, D sont en verre; les deux ensembles métalliques AB et A′B′ sont ainsi isolés et l'on peut les maintenir à des potentiels différents

---

[1] J. Malassez (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 8e série, t. XXIII, 1911, p. 491) s'est servi de la même méthode pour calculer l'action d'un condensateur plan sur un corpuscule cathodique lancé entre ses électrodes; le cas de figure et les calculs sont différents.

en reliant les fils E, E′ aux deux pôles d'une source d'électricité.

Le plateau A′ est rigidement fixé à la plaque correspondante B′ par trois boulons F′, G′ H′; le plateau A est maintenu en place par les trois vis F, G, H et trois ressorts antagonistes; il est possible, en agissant sur ces vis, d'amener les faces en regard des deux plateaux A, A′ à être exactement parallèles et de régler leur distance à une valeur convenable.

Ces plateaux sont en bronze dur, ils ont été soigneusement rodés sur trois disques plans en verre; le travail a été arrêté lorsque la lame examinée par réflexion sur un plan type de verre ne présentait plus que quatre ou cinq franges dans toute son étendue. Pour éviter les déformations qui auraient pu se produire en montant l'appareil, la dernière partie du rodage n'a été faite qu'après avoir fixé les plateaux aux joues B, B′.

L'appareil étant monté, les plateaux sont réglés exactement parallèles à la distance voulue; à cet effet : on introduit entre les armatures un petit parallélépipède rectangle de verre; les deux faces en contact avec le condensateur sont planes, polies et parallèles; elles ont 1^{cm} de côté et leur distance est environ $0^{cm},4$. On agit sur les vis de réglage jusqu'à ce que cette petite pièce de verre soit maintenue par simple effet du frottement sur les armatures, et cependant qu'elle se déplace sous l'influence d'une force très peu supérieure à son poids. Le réglage est achevé lorsque ces conditions sont satisfaites quelle que soit la position de la cale entre les armatures. Une première indication de la distance des plateaux pourrait être donnée par la mesure de l'épaisseur de cette pièce de verre; mais on ne s'en est pas servi pour les calculs; nous verrons plus loin comment cette distance est exactement mesurée.

Le condensateur est placé dans une cuve de verre

de 13^{cm} de large sur $25^{cm},8$ de long et 12^{cm} de haut; cette cuve est percée sur ses faces terminales de deux trous, ménagés pour le passage du rayon lumineux et recouverts par des lamelles minces de verre non trempé. Elle est fermée par un couvercle rodé en verre dans lequel on a percé cinq petits trous munis de bouchons de verre; deux servent au passage des fils conducteurs et les trois autres sont utilisés pour introduire le liquide et prendre sa température. Pour mettre l'appareil à l'abri de la lumière et des poussières, et le soustraire aux variations trop brusques de la température extérieure, on le place à l'intérieur d'une caisse en bois également munie d'ouvertures en regard des précédentes.

Mesure de la distance des plateaux. — La distance des faces intérieures du condensateur a été mesurée par une méthode optique. On pointe successivement, avec un viseur porté par le chariot d'une machine à diviser, les deux points d'intersection de ces surfaces planes par une droite qui leur est perpendiculaire. Il est ainsi possible d'obtenir la distance qui les sépare en différents points et par suite de vérifier leur parallélisme.

L'application de cette méthode a été réalisée expérimentalement de la façon suivante : On introduit entre les plateaux un petit parallélépipède rectangle en verre ABCD (*fig.* 35) analogue à celui qui a servi au réglage du parallélisme, mais la distance des faces AD et BC est plus petite de $\frac{1}{100}$ à $\frac{2}{100}$ de millimètre [1]. Sous l'influence de son poids, cette cale glisserait entre les armatures, si elle n'était pas suspendue à un fil. Sur sa face antérieure, préalablement argentée ABA_1B_1 (*fig.* 36), on a tracé à une petite distance des arêtes AA_1 BB_1 et paral-

[1] On obtient facilement cette différence entre les épaisseurs en découpant ces deux pièces de verre dans un même morceau de glace de Saint-Gobain.

lèlement à elles deux traits fins FG et HK. La face postérieure DC est dépolie; on l'éclaire en formant dans son plan une image d'un manchon Auer S; une cuve d'eau placée sur le trajet du faisceau lumineux évite l'échauffement.

En regardant dans le viseur V porté par le chariot de la

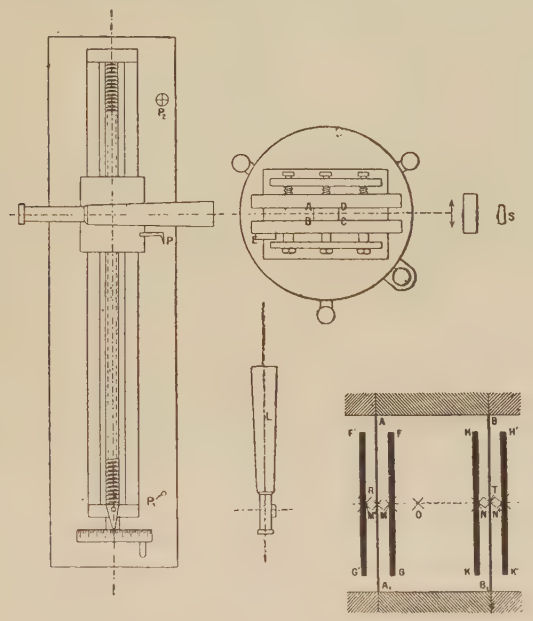

Fig. 35. Fig. 36.

machine à diviser, on aperçoit les traits verticaux FG, HK et leurs images F′ G′, H′ K′ formées par réflexion sur les faces voisines du condensateur. Les visées se font en amenant successivement le point de croisée des fils du réticule en coïncidence avec l'un des bords M du trait FG, son image M′ et le milieu R de la ligne brillante AA_1; on pointe de même de l'autre côté les points N, N′, T. Les déplacements de la lunette qui permettent ces différentes visées sont obtenus et mesurés par la machine

à diviser. La translation du chariot doit être perpendiculaire aux plans des faces du condensateur.

Pour faire ce réglage, une pointe P est fixée au chariot et on l'amène dans ses deux positions extrêmes à coïncider avec le centre d'un petit trou P_1, et avec le point d'intersection P_2 de deux fils qui sont fixés au bâti de la machine. L'œil placé en P_1 repère, dans la direction de P_2, un point à l'infini qu'on vise ensuite avec une lunette autocollimatrice L. Le condensateur est placé sur une plate-forme tournante munie de trois vis calantes; on applique contre la surface extérieure de l'un des plateaux une lame de verre E à faces planes et parallèles; en agissant sur les organes de réglage de la plate-forme, on peut rendre les faces de E perpendiculaires à l'axe optique de la lunette L; on s'assure que ce résultat est atteint au moyen du dispositif d'autocollimation. Le réglage est alors achevé.

Les erreurs les plus importantes proviennent de la mauvaise définition du point à l'infini dans la direction de l'axe de la vis de la machine à diviser, et du défaut de parallélisme des deux faces du plateau du condensateur : on peut affirmer que la tangente de l'angle que fait le déplacement du chariot avec la normale aux faces internes des armatures n'atteint pas 0,01; l'erreur relative qui en résulte sur la mesure de leur distance est inférieure à $\frac{1}{20000}$.

Le viseur V se compose d'un objectif qui donne des images agrandies environ deux fois, reprises ensuite par un microscope de faible grossissement. Dans le plan focal de l'oculaire est disposé un réticule dont les deux fils rectangulaires sont orientés à 45° de la verticale.

Le pas de la machine à diviser est de $0^{mm},5$; son tambour est divisé en 400 parties. Pour chaque série de mesures, les points M′PM, NTN′ sont pointés six fois; trois fois dans chaque sens de déplacement du chariot.

Voici par exemple les six séries de nombres obtenus dans une expérience; dans les deux dernières colonnes, j'ai inscrit leurs moyennes :

							Moyennes.	
M'..	↑ 0,3535	1,144	↑ 0,353	1,147	↑ 0,352	1,147	↑ 0,3528	1,1460
R...	1,121	1,313	1,1235	1,315	1,122	1,314	1,1222	1,1140
M..	1,286	2, 78	1,288	2, 80	1,286	2, 785	1,2867	2, 788
N...	7,302	8, 93	7,3055	8, 96	7,3035	8, 95	7,3037	8, 947
T...	8,112	8,299	8,114	8,302	8,113	8,3025	8,1130	8,3012
N'..	8,317	↓ 9,105	8,319	↓ 9,1075	8,318	↓ 9,106	8,3180	↓ 9,1062

Ce Tableau permet de calculer les distances MN, RT et M_1N_1 en désignant par M_1 le milieu de MM' et par N_1 le milieu de NN'. Si l'on utilise successivement les pointés faits dans un sens puis dans l'autre, on obtient les résultats suivants :

$$MN = 7^t,17.0, \qquad RT = 7^t,390.8, \qquad M_1N_1 = 7^t,391.1$$
$$NM = 7^t,15.9, \qquad TR = 7^t,387.2, \qquad N_1M_1 = 7^t,388.0$$

On peut remarquer que les nombres portés dans ces deux lignes diffèrent de quantités supérieures aux incertitudes expérimentales. J'ai fait une étude de cette erreur systématique. En pointant les traits d'un micromètre, on constate que si l'on tourne le tambour d'un mouvement uniforme, le déplacement du point visé n'est pas régulier : il se superpose au mouvement uniforme une oscillation sinusoïdale qui se reproduit périodiquement à chaque tour; son amplitude correspond à cinq divisions du tambour. Il est possible d'expliquer ce résultat en admettant que la vis est légèrement faussée. L'erreur qui en résulte sur la mesure de la distance de deux points dépend des deux positions du tambour qui correspondent aux visées de ces points. Il serait facile de faire une table de correction : mais comme, par suite d'une circonstance fortuite, le temps perdu demandé par l'attaque du chariot par le goujon de l'écrou est très voisin d'un demi-tour,

l'erreur s'élimine d'elle-même si l'on a soin de prendre la moyenne des déterminations faites dans les deux sens. La distance des points MN et celle des faces du condensateur sont donc représentées par les quantités

$$a_1 = \frac{MN + NM}{2}, \qquad \text{et} \qquad d_1 = \frac{RT + TR + M_1N_1 + N_1M_1}{4}.$$

Pour la série de mesures rapportée, on obtient

$$a_1 = 7^t,16.5, \qquad d_1 = 7^t.389.3.$$

Huit déterminations semblables ont été faites : entre deux déterminations successives, la lunette était retournée de 180° autour de son axe optique et la mise au point faite à nouveau. Les deux premières correspondent au milieu du condensateur; les deux suivantes également, mais le condensateur avait été retourné par une rotation de 180° de la plate-forme; les cinquième et sixième se rapportent à un point pris à 3^{cm} ou 4^{cm} de l'une des extrémités et enfin les deux dernières à l'autre extrémité. Afin d'avoir une longueur témoin, on s'est arrangé pour que les points M et N pris sur les traits FG et HK soient les mêmes dans toutes les mesures : il suffisait d'enfoncer plus ou moins la cale entre les plateaux de façon que la ligne de visée passe toujours par un repère O tracé sur l'argenture.

Voici les résultats obtenus.

a_1.	d_1.
$7^t,16.5$	$7^t,389.3$
$7^t,26.3$	$7^t,399.1$
$7^t,17.9$	$7^t,391.1$
$7^t,18.7$	$7^t,392.3$
$7^t,19.2$	$7^t,394.3$
$7^t,16.0$	$7^t,388.3$
$7^t,17.5$	$7^t,388.7$
$7^t,21.3$	$7^t,392.5$

L'examen de ce Tableau montre que les nombres ne sont pas très concordants; les écarts sont de dix divisions du tambour. Ils se produisent aussi bien entre deux nombres consécutifs et ne proviennent donc pas du défaut de planéité ou de parallélisme des armatures du condensateur; ils affectent dans le même sens et de quantités voisines, les valeurs de a_1 et d_1.

Ces erreurs sont la conséquence du défaut de mise au point joint à la diaphragmation du faisceau lumineux par les plateaux du condensateur. C'est pour pouvoir corriger cette erreur que j'ai mesuré dans chaque cas la distance MN. Cette distance a été ensuite déterminée par les mêmes méthodes après avoir enlevé le condensateur; l'autocollimation de la lunette L se fait alors directement sur les faces latérales de la petite cale de verre. Le faisceau lumineux n'étant plus diaphragmé, les nombres obtenus sont très concordants et l'on a pris comme valeur réelle de la distance MN

$$a_0 = 7^t,19.5,$$

moyenne de 20 déterminations.

Il est facile de voir que les distances a_1, d_1 mesurées sont proportionnelles aux distances réelles a_0, d_0; les longueurs d_0 et a_0 étant assez voisines, il suffit d'employer la formule $d_0 - d_1 = a_0 - a_1$. Les huit valeurs ainsi calculées pour d_0 sont :

$7^t,392.3$	$7^t,394,6$
$7,392,3$	$7,391,8$
$7,392,7$	$7,390,7$
$7,393.1$	$7,390,7$

elles sont beaucoup plus concordantes; leur moyenne est

$$d = 7^t,392.3,$$

ou, en millimètres,

$$d = 3^{mm},9904.$$

Il faut faire subir à ce nombre une correction, tenant à ce que le pas de la vis n'est pas exactement de $0^{mm},5$.

Une étude très soignée de la vis de la machine dont je me suis servi a été faite par M. Abraham [1] qui l'a comparée à une règle étalon du Bureau international des Poids et Mesures. M. Abraham a bien voulu me communiquer les résultats détaillés de cette étude qui m'ont permis de choisir une partie régulière de la vis; la longueur vraie à t^0 est liée à la longueur observée par la relation

$$d = d_0[1 - (82 - t)10^{-5}].$$

Les mesures ont été effectuées à la température de $18^0,5$, on trouve alors pour la distance moyenne des plateaux

$$d = 0^{cm},39878.$$

Bien que d'une extrémité à l'autre du condensateur, l'épaisseur varie de 3^{μ}, *on peut affirmer que l'erreur commise en adoptant cette valeur moyenne, n'atteint pas* 1^{μ}, *de sorte que l'erreur relative ne dépasse pas* $\frac{1}{4000}$.

Longueur des plateaux. — Les côtés latéraux des deux électrodes métalliques ont été travaillés ensemble après qu'on eut collé les faces qui devaient former les parties intérieures du condensateur; les arêtes qui se trouvent au voisinage des points d'entrée et de sortie du faisceau lumineux n'ont pas été arrondies. Par suite, les deux plateaux ont une longueur identique bien définie; mesurée à la machine à diviser, elle a été trouvée, après correction du pas de la vis, égale à

$$l = 20^{cm},111.$$

Après le montage de l'appareil, les deux plateaux

---

[1] Abraham, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 6e série, t. XXVII, 1892, p. 490.

peuvent n'être plus exactement en regard. J'ai vérifié que le glissement d'un plateau par rapport à l'autre était inférieur à $\frac{1}{10}$ de millimètre. L'action sur la lumière polarisée n'est plus exactement calculable par les résultats de l'étude précédente; la modification de cette action produite par le déplacement des plateaux est inférieure à celle qui résulterait d'une variation de longueur de $\frac{1}{100}$ de millimètre; je l'ai donc négligée et fait les calculs en supposant les armatures exactement en regard l'une de l'autre.

Les données numériques du condensateur sont :

Distance des plateaux.....	$d = 0,39878^{\text{cm}}$
Longueur des plateaux.....	$l = 20,111$
Épaisseur des plateaux.....	$e = 0,6$
Longueur de la cuve.....	$L = 25,8$

elles permettent de calculer en fonction du potentiel la valeur du champ en chacun des points du trajet du rayon lumineux. La distance des plateaux est assez petite par rapport à leur longueur et leur largeur pour que, comme on l'a vu plus haut, il n'en résulte aucune erreur dans l'application des formules établies en supposant ces deux dernières dimensions infinies.

Si l'on ne tient pas compte, pour un instant, de la limitation de la cuve, on obtient, en supposant successivement

$$e = 0, \qquad e = 0^{\text{cm}},6, \qquad e = \infty,$$

les trois corrections de longueur suivantes : $0^{\text{cm}},127$, $0^{\text{cm}},224$, $0^{\text{cm}},254$; le second de ces nombres calculé par la formule (5) est beaucoup plus éloigné de la correction de Lemoine que de la valeur double correspondant à une épaisseur des plateaux infinie. Dans ce dernier cas, l'influence des portions des surfaces latérales à plus de 6^{mm} des faces intérieures, est déjà faible. A plus forte raison, les montures B, B′ qui sont de plusieurs centimètres en

retrait sur les extrémités des plateaux, ne peuvent pas avoir un effet appréciable, et la correction peut se calculer sans erreur sensible en prenant pour e la valeur $0^{cm},6$.

Si l'on tient compte de la limitation de la cuve, la correction de longueur se calcule par les formules (8) et (9); en utilisant les arguments $\alpha = 2,063$, $\theta = 0,117$ on trouve 0,220; cette correction est très voisine de celle obtenue en supposant la cuve illimitée; cela tient à ce que $L - l$ est grand par rapport à e. L'hypothèse de la non réfraction des lignes de force qui a servi à établir ces formules n'entraîne donc pas d'erreur sur le résultat.

Cette discussion conduit à une valeur de la correction égale à 0,220; les hypothèses qui ont servi à la faire sont vérifiées par les expériences de Leiser, et l'on peut penser que l'erreur n'atteint pas $0^{cm},002$.

J'admets donc pour valeur de la longueur corrigée du condensateur

$$l' = 20^{cm},111 + 0^{cm},220 = 20^{cm},331.$$

avec une erreur possible inférieure à $\frac{5}{100}$ *de millimètre, c'est-à-dire, avec une erreur relative plus petite que* $\frac{1}{4000}$.

Grand condensateur. — Au cours de ces recherches, j'ai utilisé un second condensateur, entièrement construit au Laboratoire par mes propres moyens et dont je ne donnerai qu'une description sommaire.

Les armatures A, A′ (*fig.* 37) sont constituées par deux

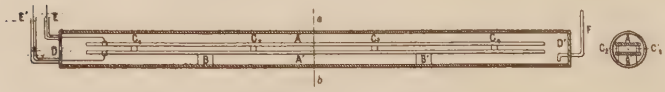

Fig. 37.

bandes de glace de Saint-Gobain de 90^{cm} de long, 5^{cm} de large et $0^{cm},5$ d'épaisseur. Elles ont été argentées par le procédé Lumière, puis cuivrées par électrolyse. Ces plateaux sont maintenus à une distance voisine de $0^{cm},84$

par huit petites cales C_1, C'_1, C_2, C'_2, ..., découpées dans un même morceau de glace, convenablement choisi; ils reposent sur les supports B, B′ également en verre. Toutes les pièces précédentes sont collées par une solution de gomme arabique et forment un ensemble rigide qu'on introduit dans la cuve constituée par un grand tube de verre cylindrique de 96^{cm} de long et 7^{cm} de diamètre extérieur. Les extrémités de ce tube sont fermées par des glaces dans lesquelles on a ménagé, pour le passage du faisceau lumineux, les ouvertures D, D′ recouvertes de lamelles de verre non trempées. Les fils conducteurs pénètrent par les tubes E, E′, et enfin le tube F est utilisé pour introduire et retirer le liquide soumis à l'expérience.

La distance des plateaux

$$d_1 = 0^{cm},8375$$

a été obtenue en prenant l'épaisseur moyenne des cales C.

La mesure de la longueur des électrodes a donné

$$l_1 = 90^{cm},17.$$

Après une discussion analogue à la précédente, j'ai admis pour valeur de la longueur corrigée

$$l'_1 = 90^{cm},6,$$

Les erreurs relatives possibles sont environ $\frac{1}{800}$ pour d_1 et $\frac{1}{1000}$ pour l'_1.

C. — Le Potentiel. Mesures électriques.

L'établissement d'une source électrique constante et l'installation des appareils destinés à comparer son potentiel au volt international sont les parties de mes recherches qui ont exigé le travail matériel le plus considérable. J'ai construit avec l'aide du personnel du laboratoire, que je suis heureux de remercier ici, une batterie

d'accumulateurs de 10 000 volts et cinq boîtes de résistances de 2 mégohms chacune. Ces appareils permettent d'appliquer les méthodes usuelles de comparaison des forces électromotrices des piles par opposition et avec les instruments ordinaires d'un laboratoire, il serait possible de mesurer la différence de potentiel de 10 000 volts à $\frac{1}{10}$ de volt près; je n'ai donc eu aucune difficulté sérieuse à obtenir cette quantité avec une précision dix fois moindre qui était amplement suffisante pour le but que je me proposais.

Accumulateurs. — La source d'électricité est une batterie d'accumulateurs de 5120 éléments. Ils ont été construits et formés pendant les mois de juillet à novembre 1910 et fonctionnent régulièrement depuis cette époque [1]. Les récipients utilisés sont de petits flacons cylindriques de verre à fond plat (piluliers) de 8^{cm} de haut et $2^{cm},8$ de diamètre extérieur. Après les avoir remplis jusqu'aux trois quarts de leur hauteur d'acide sulfurique à la concentration voulue, on les dispose dans des cuvettes photographiques de porcelaine en les séparant à la base par des baguettes de verre entre-croisées. J'ai ainsi employé 64 cuvettes de dimensions 24×30, chacune d'elles contenant 80 de ces éléments. Les électrodes sont constituées par des lames de plomb pur de 16^{cm} de long, $1^{cm},5$ de large et $0^{cm},1$ d'épaisseur, recourbées en forme d'U et placées à cheval sur deux vases consécutifs. La longueur adoptée pour ces lames est telle que les extrémités restent à plus de 5^{mm} du fond du récipient pour éviter que le plomb devenu poreux qui peut se détacher des électrodes ne mette les éléments en court circuit. Pour éviter l'évapo-

---

[1] J'ai retiré grand profit des excellents conseils qu'ont bien voulu me donner MM. Bancelin et Jumau qui se sont spécialisés dans l'étude de cette question.

ration, on recouvre le liquide d'une couche d'huile de 1^{cm}. Ces cuvettes sont rangées sur les rayons d'une armoire où on les dispose en séries par groupes de quatre; les pôles de chacun de ces 16 groupes, dont le voltage normal est 640 volts, sont reliés à un tableau de distribution qui permet de les réunir en tension ou en parallèle.

La formation de ces accumulateurs s'est faite en deux phases distinctes par le procédé Planté [1]. Pendant la première période qui a duré 3 mois, le liquide utilisé était de l'acide à 1° Baumé. On a inversé la polarité des éléments plusieurs fois pendant le premier mois, puis à la fin du second mois et en dernier lieu, au début de la seconde formation. Celle-ci s'est faite avec de l'acide à 22° Baumé; elle a duré 15 jours, mais la capacité finale n'a été atteinte qu'après quelques mois d'utilisation. Les intensités du courant de charge étaient pour un élément de 4 à 5 milliampères pendant la première formation et de 8 à 10 lors de la seconde.

Le prix de la matière première employée a été environ 800^{fr}. Le premier montage des éléments et le remplacement de l'acide sont deux opérations assez longues qui ont demandé chacune 15 jours de travail à trois personnes; mais l'entretien ultérieur est à peu près nul. Si l'on a soin de mettre les cuvettes *à l'abri de toute poussière*, les éléments restent parfaitement propres et la couche d'huile supprime entièrement l'évaporation du liquide. Les accumulateurs peuvent ainsi servir plusieurs années sans qu'il soit nécessaire d'ajouter de l'eau, et le plus gros travail d'entretien a été le remplacement de quatre ou cinq vases spontanément brisés.

La surface utile d'une électrode est de $7^{cm^2},5$ pour la

---

[1] J'ai utilisé pour cette formation une batterie d'accumulateurs T. E. M. qui comprend 12 boîtes de 44 éléments; son voltage normal est par suite 1056 volts; sa capacité est de 1,5 ampère-heure.

face en regard de l'électrode correspondante et autant pour la face voisine de la paroi du récipient. La capacité obtenue correspond à un débit de 1 milliampère pendant 36 heures ou de 10 milliampères pendant 2 heures. Le premier régime a seul été utilisé pour les mesures, le voltage devient alors constant 2 heures après la mise en service, et le palier de la courbe de décharge se prolonge pendant 20 heures. Cette batterie peut donc servir à un travail continu à condition d'être rechargée la nuit.

Résistances. — Pour mesurer par une méthode électromagnétique la force électromotrice de ces accumulateurs, sans leur faire débiter plus de 1 milliampère, il est nécessaire de disposer d'une résistance de 10 mégohms. J'ai fait construire au laboratoire cinq boîtes de 2 mégohms avec des bobines fournies par la maison Carpentier. Elles sont constituées par du fil de manganine de $\frac{9}{100}$, isolé par deux guipages soie et enroulé sur un noyau en carton verni de $2^{cm},8$ de long sur $2^{cm},8$ de diamètre. Ces bobines dont la résistance varie entre 30 et 60 000$^{\omega}$ sont enfilées par groupes de six sur des baguettes de verre fixées par leurs extrémités sur des plateaux d'ébonite. Cette association a été faite de façon à ce que quatre groupes consécutifs forment une résistance très voisine de 1 mégohm. Chaque paire de plateaux d'ébonite supporte huit colonnes de bobines disposées en S et est complètement enfermée dans une boîte en acajou dont le couvercle laisse passer trois bornes reliées aux deux extrémités et au milieu de l'enroulement; entre deux bornes consécutives est donc intercalée une résistance de 1 mégohm.

Je me suis également servi d'un mégohm divisé en dix sections et d'une boîte de précision de 100 000$^{\omega}$ divisée aussi en dix sections égales; ces deux boîtes provenaient de la maison Carpentier.

Pile étalon. — La force électromotrice des accumula-

teurs a été comparée à celles de deux éléments Weston provenant du Laboratoire central d'Électricité; je remercie bien vivement M. Janet qui m'a donné ces piles et M. Jouaust qui s'est chargé de leur étalonnage. Les forces électromotrices de ces éléments étaient supérieures de $\frac{4}{100000}$ et $\frac{3}{100000}$ à celle de l'élément normal pour lequel j'ai admis la valeur à t^0 :

$$E_t = 1^v,0183 - 0,00004(t - 20).$$

J'ai étalonné à nouveau ces piles à la fin des mesures et les variations de leurs forces électromotrices n'avaient pas atteint quelques cent-millièmes.

Mesures du potentiel. — J'ai utilisé pour la détermination de la constante de Kerr du sulfure de carbone des différences de potentiel comprises entre 10 000 et 11 000 volts; les forces électromotrices supérieures à 10 000 volts ont été obtenues en plaçant, en série avec les 5120 éléments construits au laboratoire, la batterie

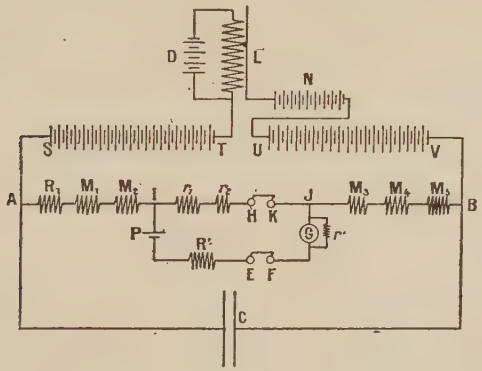

Fig. 38.

de 1000 volts d'accumulateurs T. E. M. qui a servi à leur formation. Pour des raisons d'isolement, cette dernière N est intercalée au milieu de la batterie à haute tension ST, UV (*fig.* 38).

Pendant toute la durée d'une série de mesures (2 à 3 heures), le voltage peut être maintenu constant en ajoutant une différence de potentiel variable prise entre l'une des extrémités et le curseur d'un rhéostat L de 1500^{ω} dans lequel on fait débiter une boîte de 88 volts. Les pôles S et V de la batterie à haute tension sont réunis par des fils de cuivre aux deux armatures du condensateur C.

La différence de potentiel V ainsi maintenue entre ces armatures peut être mesurée en la comparant par la méthode ordinaire d'opposition à la force électromotrice E de l'élément Weston P. A cet effet, on fait débiter les accumulateurs dans une série de résistances composée : 1° des cinq boîtes de 2 mégohms $M_1, \ldots, M_5$ auxquelles on peut adjoindre une ou plusieurs fractions du mégohm Carpentier R_1, 2° de la boîte de précision r_1 de $100\,000^{\omega}$ dont les dix sections sont mises en parallèle et à laquelle il est possible d'ajouter pour le réglage quelques ohms d'une boîte à fiches ordinaire r_2.

La force électromotrice de la pile est opposée à la différence de potentiel créée par le courant dans ces deux dernières résistances; si l'on désigne par R la somme des résistances R_1, $M_1, \ldots, M_5$ et par r la somme des résistances r_1, r_2, on a, lorsqu'aucun courant ne passe dans le galvanomètre G,

$$V_0 = E \times \frac{R + r}{r}.$$

La mesure précise de V suppose le rapport $\frac{R}{r}$ connu exactement; j'indiquerai plus loin comment j'ai fait la comparaison de ces résistances sans erreur appréciable.

L'erreur commise dans la mesure dépend de la sensibilité du galvanomètre G. J'ai employé un galvanomètre Desprez-d'Arsonval dont le cadre mobile a une résistance de 3000^{ω}, la période de ses oscillations est de 20 secondes

et la résistance critique est d'environ 30 000$^{\omega}$. Il donne sur une échelle à 1^{m} une déviation de 2^{mm} pour un courant de 10^{-9} ampère. Cette grande sensibilité a permis d'intercaler dans le circuit de la pile une résistance R′ de 100 000$^{\omega}$ qui l'empêche de débiter des courants trop considérables. Le galvanomètre est shunté par une résistance r' d'environ 40 000$^{\omega}$ pour que l'amortissement soit voisin de sa valeur critique. Dans ces conditions, une variation de 1^{ω} de la résistance r qui est voisine de 1000$^{\omega}$ et est parcourue par un courant de 1 milliampère, produit une variation de 10^{-3} volt dans la chute de potentiel entre les points I et J et un déplacement du spot de 17^{mm}. Le même effet serait produit par une variation de 10 volts dans la différence de potentiel V.

En agissant de temps en temps sur le curseur du rhéostat L, il est facile d'empêcher le spot de s'écarter de plus de $1^{mm},7$ de la position d'équilibre qu'il prend lorsqu'on ouvre l'interrupteur EF et par suite de maintenir le potentiel constant à $\frac{1}{10000}$ de sa valeur.

Isolement. — Des erreurs peuvent être introduites par les dérivations provenant du défaut d'isolement. Tous les appareils compris entre A et B (boîtes de résistances, piles, galvanomètre) sont supportés par des colonnes de diélectrine de 12^{cm} de haut, recouvertes de verres renversés qui les protègent des poussières. Les fils de connexion sont en cuivre nu de 2^{mm} de diamètre et sont assez rigides pour n'exiger aucun support. Pour vérifier l'isolement, après avoir coupé les connexions en A et B, ouvert les interrupteurs HK et EF et joint par un fil métallique les points H et F, j'ai mis successivement les extrémités A et B en communication avec l'un des pôles de la batterie de 10 000 volts, l'autre pôle étant mis au sol; dans aucun cas, je n'ai constaté de déviation permanente du galvanomètre supérieure à 3^{cm}; dans ces con-

ditions où l'on a exagéré la différence de potentiel entre les différents points du circuit et le sol, les courants dérivés par les défauts d'isolement sont inférieurs à $1{,}5 . 10^{-8}$ ampère; même s'ils traversaient les 10 mégohms, la chute de potentiel correspondante ne serait que de 0,15 volt. Les erreurs qui peuvent provenir du défaut d'isolement sont donc inférieures à celles des mesures. Ajoutons enfin que le galvanomètre a dû être protégé des actions électrostatiques; il a suffi de l'enfermer dans une cage métallique reliée par un fil de cuivre à l'une de ses bornes.

Comparaison des résistances. — Bien que les résistances R et r soient d'ordres de grandeur très différents, il a été possible de les comparer avec une très grande précision par la méthode du pont de Wheatstone. J'ai utilisé une remarque classique [1] : soient p résistances très voisines de leur valeur moyenne ρ, elles peuvent s'écrire

$$\rho(1+\varepsilon_1), \quad \rho(1+\varepsilon_2), \quad \ldots, \quad \rho(1+\varepsilon_p),$$

avec la condition

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p = 0.$$

La résistance obtenue en les disposant en série est

$$R = p\rho;$$

si maintenant on les associe en parallèle, on obtient une résistance r telle que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_1} + \frac{1}{1+\varepsilon_2} + \ldots + \frac{1}{1+\varepsilon_p}\right);$$

en développant les quantités $\frac{1}{1+\varepsilon}$ en série, et tenant

---

[1] *Cf.* Mascart, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, 2e éd. t. II, p. 358.

compte de la condition $\Sigma \varepsilon_i = 0$, on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left(p + \sum \varepsilon_i^2 - \sum \varepsilon_i^3 + \ldots\right);$$

d'où

$$R = p^2 r\left(1 + \frac{1}{p}\sum \varepsilon_i^2 - \frac{1}{p}\sum \varepsilon_i^3 \ldots\right),$$

R est égal à $p^2 r$ avec une erreur inférieure à ε^2 en désignant par ε la plus grande des quantités

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p.$$

Pour la mesure qui nous intéresse, cette remarque, appliquée successivement aux dix fractions de la boîte de 100000^{ω} et aux 10 mégohms construits au laboratoire, a permis de ramener à une seule mesure la comparaison de la résistance r voisine de 1000^{ω} à la résistance R voisine de 10^7 ohms : il a suffi de comparer la résistance de la boîte de 100000^{ω} à la résistance voisine obtenue en disposant en parallèle les 10 mégohms. La comparaison entre elles des fractions de la boîte de 100000^{ω} et celle des différents mégohms, a montré que les erreurs ainsi introduites sont dans chaque cas, inférieures à $\frac{1}{10^7}$ donc entièrement négligeables.

J'ai trouvé, en considérant comme exacte la résistance de la boîte de 100000^{ω}, que celle des 10 mégohms en série est de 10000100^{ω}. J'ai également déterminé en fonction de cette même résistance les fractions du mégohm Carpentier que j'ai dû utiliser lorsque le voltage dépasse 10 000 volts pour éviter que la résistance r ne tombât au-dessous de 1000^{ω}. Quant à la résistance d'appoint r_2, elle n'a jamais dépassé quelques ohms, j'ai pu admettre sans erreur appréciable la valeur marquée. L'influence des variations de la température extérieure et de l'échauffement produit par le courant de 1 milliampère qui traverse les résistances a été étudiée et trouvée négligeable.

En résumé, l'étalonnage des résistances a pu se faire à $\frac{1}{100\,000}$ près, le potentiel est mesuré avec une précision supérieure à celle avec laquelle il a été maintenu constant et l'*on peut affirmer qu'il est connu à* 1 *volt près.*

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA BIRÉFRINGENCE ÉLECTRIQUE DU SULFURE DE CARBONE.

Ce Chapitre comprend trois parties : l'étude de l'influence des impuretés sur le phénomène, la vérification de la loi de Kerr et enfin la détermination des constantes absolues pour les radiations jaune et verte de l'arc à mercure.

A. — Influence des impuretés.

Des résultats obtenus dans les différentes déterminations de la constante de Kerr du sulfure de carbone, il semble résulter que la valeur de cette constante est notablement influencée par la présence de traces d'impuretés. Pourtant Tauern a trouvé pour deux sulfures, l'un très vieux et coloré en jaune, l'autre récemment purifié et incolore, des nombres qui ne diffèrent que de $\frac{1}{300}$ de leur valeur.

Bien que les études de Schmidt et de Lippmann sur les mélanges aient montré que ceux-ci ne suivent pas exactement la loi d'additivité, cette loi suffit à prévoir, en première approximation, les modifications apportées par les impuretés à la biréfringence électrique. Pour expliquer la variation d'un échantillon à l'autre de la constante de Kerr du sulfure de carbone, il faudrait donc admettre, soit la présence d'une impureté possédant

une biréfringence électrique considérable, soit le mélange d'un autre corps en proportion notable. La première hypothèse semble peu vraisemblable : les corps possédant une constante de Kerr bien supérieure à celle du sulfure de carbone sont en petit nombre et l'on n'a jamais signalé leur présence dans le sulfure commercial. La seconde est démentie par l'ensemble des propriétés physiques parfaitement définies du sulfure de carbone.

D'autre part, l'étude critique des différentes mesures montre que leur précision n'est en général pas telle que l'on ne puisse attribuer aux erreurs expérimentales les divergences observées. Pour résoudre cette question, j'ai comparé les biréfringences électriques de sulfures de provenances diverses.

La méthode qui a servi à cette comparaison est une modification de celle de Des Coudres employée par Leiser : j'ai obtenu la compensation sans modifier la distance des armatures des condensateurs, en faisant varier le rapport des différences de potentiel qui leur sont appliquées. Ces différences de potentiel sont obtenues et leur rapport mesuré par une méthode potentiométrique. Le schéma du montage est donné par la figure 39 : si R et R′

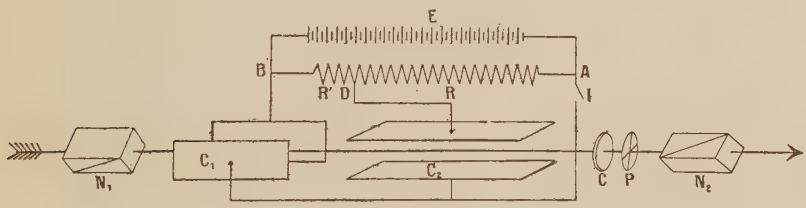

Fig. 39.

désignent les résistances AD et DB, les différences de potentiel agissant sur les deux condensateurs C_1 et C_2 sont dans le rapport

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R + R'}{R}; \tag{1}$$

en déplaçant le curseur D, on peut faire varier ce rapport.

Les condensateurs C_1 et C_2, sont disposés à la suite l'un de l'autre de façon que leurs lignes de force soient rectangulaires. Pour obtenir ce résultat, la section principale du polariseur N_1 est disposée verticalement et la vibration rectiligne ainsi obtenue est pointée par l'appareil général d'étude des vibrations elliptiques (Cf. p. 115). On oriente successivement les condensateurs C_1 et C_2 de façon que le pointé ne soit pas modifié lorsque l'un d'eux est soumis au champ électrique. Les condensateurs ont alors leurs lignes de force rectangulaires; les vibrations rectilignes dirigées suivant ces deux directions se propagent sans altération et prennent une certaine différence de phase qui est en sens inverse pour les deux condensateurs; l'effet optique sur une vibration quelconque sera nul si les retards dus aux deux condensateurs sont égaux. Cette égalité est obtenue et contrôlée avec la plus grande précision possible de la façon suivante : le polariseur N_1 est tourné de 45° à partir de sa position précédente, et l'on tourne également l'analyseur de façon à pointer la nouvelle vibration obtenue en l'absence du champ. On établit ensuite la différence de potentiel, puis, sans toucher aux appareils optiques, on rétablit l'égalité des plages par action sur le curseur D. Toutes ces opérations sont faites en lumière blanche; la source utilisée était un arc électrique entre électrodes de charbon.

Le rapport des potentiels est donné par le rapport des résistances correspondantes; en admettant la loi de Kerr la méthode précédente peut être utilisée de la même façon que celle du condensateur variable pour comparer les biréfringences électriques de différents corps. Il faut cependant remarquer que l'établissement de la formule (1) suppose qu'aucun courant traversant le potentiomètre n'est dérivé en D dans le condensateur C_2; celui-ci doit donc être parfaitement isolant. S'il n'en est pas ainsi,

la mesure du rapport $\frac{V_1}{V_2}$ demande la détermination de la résistance de ce condensateur et la méthode précédente perd tout intérêt. Il existe deux cas où cette détermination n'est pas nécessaire : 1° lorsque la résistance ρ du condentateur C_2 est très grande par rapport à celle du potentiomètre; 2° lorsque les différences de potentiel nécessaires pour obtenir la compensation sont voisines : la résistance R′ est alors petite par rapport à R et il suffit que le rapport $\frac{R'}{\rho}$ soit négligeable.

Les expériences entreprises pour rechercher l'influence des impuretés ont consisté à comparer, dans les mêmes conditions de voltage, au condensateur C_1 rempli toujours du même sulfure, le condensateur C_2 dans lequel on plaçait les différents sulfures à étudier [1]. Les deux condensateurs qui ont servi dans ces expériences sont ceux que j'ai décrit précédemment. Les dimensions qu'on se proposait de donner au second ont été calculées en admettant la loi de Kerr de façon que la compensation se fasse exactement si l'on remplit les deux condensateurs d'un même liquide et si l'on établit la même différence de potentiel aux bornes des armatures. En se reportant aux valeurs obtenues par la mesure de ces dimensions, on voit que cette condition n'était pas réalisée de façon rigoureuse, mais elle l'était suffisamment pour que, dans toutes les expériences qui suivent, la résistance R′ n'ait jamais été supérieure à une faible fraction de R; on se trouvait dans le deuxième cas cité plus haut, et la mesure

---

[1] Pour avoir la plus grande sensibilité, on a toujours employé la force électromotrice maxima dont on pouvait disposer, soit 11 000 volts. Il est inutile de reproduire toujours rigoureusement la même différence de potentiel, car la compensation est indépendante de sa valeur comme nous le verrons plus loin à propos de la vérification de la loi de Kerr.

grossière du courant dérivé dans C_2 a montré que son effet était négligeable.

Le condensateur étalon C_1 à armatures verticales s'est trouvé avoir une action un peu plus faible que le grand condensateur C_2 rempli du sulfure étudié. La compensation se faisait de la façon suivante : R restait fixe et égal à $10^7\,\omega$; la résistance R′ était constituée par un certain nombre de bobines de $10\,000^\omega$ de la boîte de précision de $100\,000^\omega$ déjà décrite. Dans chaque cas, un aide établissait et supprimait le champ, au moyen de l'interrupteur I, tandis que l'observateur, par l'examen des changements survenus dans l'éclairement des plages, voyait si la biréfringence du compensateur C_2 était supérieure ou inférieure à celle de la cuve étalon. On peut ainsi fixer le nombre de bobines à employer; la résistance R′ qui serait nécessaire pour obtenir une compensation exacte est connue à 5000^ω près. Cette erreur sur la résistance correspond à une erreur de $\frac{1}{2000}$ sur le rapport des potentiels, c'est-à-dire de $\frac{1}{1000}$ sur la valeur de la constante. Dans les conditions de l'observation, un écart de 5000^ω sur la résistance R′ produit une variation de 40″ sur la biréfringence observée. J'ai vérifié que la compensation est indépendante du temps et n'est pas modifiée lorsqu'on laisse les condensateurs chargés.

Le condensateur étalon était rempli de sulfure pur de la maison Kahlbaum distillé deux fois au laboratoire.

Dans l'autre condensateur, j'ai successivement étudié les quatre échantillons suivants :

1° Sulfure de la maison Kahlbaum, traité au laboratoire suivant la méthode indiquée par Blackwell; il a été successivement agité avec de la chaux vive, du mercure, une solution concentrée de chlorure mercurique, puis desséché par du chlorure de calcium. Je n'ai pas employé comme desséchant l'anhydride phosphorique, mais le séjour sur le chlorure de calcium a été prolongé pendant

plusieurs mois et j'ai fait ensuite trois distillations successives;

2° Sulfure pur de la maison Poulenc, distillé directement dans le condensateur;

3° Sulfure précédent agité 1 jour avec du mercure, chauffé 3 jours au réfrigérant ascendant avec de la chaux vive, distillé, agité 1 jour avec du mercure sec, et enfin distillé dans l'appareil.

4° Sulfure ordinaire de la maison Chenal dont j'ai simplement séparé les fractions de tête et de queue par une seule distillation [1].

La résistance R étant toujours de 10^7 ohms, on a trouvé pour R′ :

Premier sulfure	(28 juin 1913).....	$R' = 20\,000^{\omega}$
»	(3 juillet »).....	$R' = 40\,000$
Deuxième sulfure	(8 juillet »).....	$R' = 40\,000$
»	(11 juillet »).....	$R' = 40\,000$
Troisième sulfure	(21 juillet »).....	$R' = 35\,000$
»	(22 juillet »).....	$R' = 35\,000$
Quatrième sulfure	(29 juillet »).....	$R' = 30\,000$

On remarquera la différence entre les deux premiers nombres; elle peut être attribuée aux différences entre les températures des deux cuves sur l'importance desquelles mon attention n'avait pas encore été attirée : une variation de 1° dans la température de l'une d'elles produit un changement de $\frac{1}{200}$ de la valeur de la constante et correspond à une variation de la résistance R′ de $25\,000^{\omega}$. Pour les autres expériences, j'ai eu soin de ne faire les mesures qu'après avoir abandonné les deux

[1] Tous ces échantillons de sulfure de carbone passaient à la distillation à une température qui (une fois corrigée de l'effet de la variation de la pression atmosphérique) était constante et la même pour tous à $\frac{1}{10}$ de degré près. La valeur lue est de 46°0 pour 760^{mm} sans correction thermométrique ni barométrique. Leur conductibilité est pourtant très différente d'un échantillon à l'autre.

cuves au moins 24 heures dans la salle dont j'avais fermé les ouvertures.

Les nombres obtenus pour un même échantillon sont plus concordants; les nombres obtenus pour les divers échantillons ne s'écartent pas de plus de 5000^{ω} de leur moyenne ($35\,000^{\omega}$) et il est impossible de conclure, à l'exactitude de ces expériences, à une différence entre eux. *On peut en tous cas affirmer que la constante de Kerr de tous ces sulfures ne s'écarte pas de la valeur moyenne de plus de* $\frac{1}{1000}$.

B. — **Vérification de la loi de Kerr.**

La loi, découverte par Kerr, qui relie la double réfraction au champ électrique, a été vérifiée par différents expérimentateurs, en mesurant pour plusieurs valeurs du champ la biréfringence produite. Je vais montrer qu'elle résulte du fait que la compensation précédente subsiste lorsque l'on fait varier la force électromotrice établie aux extrémités du potentiomètre.

Les deux condensateurs étant remplis d'un même corps (sulfure de carbone), j'ai établi la compensation avec la plus grande précision possible, en utilisant la différence de potentiel maxima dont je pouvais disposer. L'observation étant faite avec une source de lumière blanche, en faisant décroître jusqu'à zéro cette différence de potentiel, il ne m'a pas été possible à aucun moment de percevoir une différence d'éclairement ou de coloration entre les plages.

Interprétons ce résultat. Supposons que pour un condensateur plan quelconque, le retard exprimé en longueurs d'onde soit représenté par le produit de la longueur des électrodes par une fonction inconnue du champ et de la longueur d'onde de la radiation utilisée. Pour chacun des condensateurs précédents, le retard correspondant

à une radiation de longueur d'onde λ sera

$$\frac{\delta}{\lambda} = l f(\mathrm{H}, \lambda), \qquad \frac{\delta_1}{\lambda} = l_1 f(\mathrm{H}_1, \lambda).$$

Si l'on désigne par ε la plus petite biréfringence observable soit par l'inégalité d'éclairement des plages, soit par leur différence de coloration, on peut poser

$$(1) \qquad l f(\mathrm{H}, \lambda) \equiv l_1 f(\mathrm{H}_1, \lambda) + \theta\varepsilon,$$

θ restant inférieur à 1 en valeur absolue.

Les champs H et H_1 sont liés par la relation

$$\frac{\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{V}_1}{\mathrm{V}} \frac{d}{d_1},$$

en désignant, pour les deux condensateurs, par V et V_1 les différences de potentiel, et par d et d_1 les distances des électrodes. Le second membre est constant; si l'on appelle a sa valeur, on a $\mathrm{H}_1 = a\mathrm{H}$. Soit H_0 la plus grande valeur de H qui a servi dans l'expérience et appliquons la relation (1) aux valeurs en progression géométrique décroissante

$$\mathrm{H}_0, \ a\mathrm{H}_0, \ \ldots, \ a^{n-1}\mathrm{H}_0,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
l f(\mathrm{H}_0, \lambda) &\equiv l_1 f(a\mathrm{H}_0, \lambda) + \theta_1\varepsilon, \\
l f(a\mathrm{H}_0, \lambda) &\equiv l_1 f(a^2\mathrm{H}_0, \lambda) + \theta_2\varepsilon, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
l f(a^{n-1}\mathrm{H}_0, \lambda) &\equiv l_1 f(a^n\mathrm{H}_0, \lambda) + \theta_n\varepsilon;
\end{aligned}$$

d'où en additionnant ces égalités aprés les avoir multipliées respectivement par $\left(\frac{l}{l_1}\right)^n, \left(\frac{l}{l_1}\right)^{n-1}, \ldots, \frac{l}{l_1}$;

$$l\left(\frac{l}{l_1}\right)^n f(\mathrm{H}_0, \lambda) \equiv l f(a^n\mathrm{H}_0, \lambda) + \varepsilon\left[\theta_1\left(\frac{l}{l_1}\right)^n + \theta_2\left(\frac{l}{l_1}\right)^{n-1} + \ldots + \theta_n\frac{l}{l_1}\right].$$

Le coefficient de ε est inférieur à

$$\frac{l}{l_1}+\ldots+\left(\frac{l}{l_1}\right)^n<\frac{l}{l_1-l};$$

on peut donc écrire

$$f(a^n H_0, \lambda) = \left(\frac{l}{l_1}\right)^n f(H_0, \lambda) + \theta_0 \frac{\varepsilon}{l_1 - l}.$$

Posons $H = a^n H_0$ et déterminons un nombre k par la condition $a^k = \frac{l}{l_1}$, on a

$$\left(\frac{l}{l_1}\right)^n = a^{kn} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^k;$$

en portant dans la relation précédente, on obtient

$$f(H, \lambda) = H^k \frac{f(H_0, \lambda)}{H_0^k} + \theta_0 \frac{\varepsilon}{l_1 - l}.$$

Cette formule donne la fonction $f(H, \lambda)$ [1]; de son examen on peut tirer les conclusions suivantes :

1° Le second membre est le produit d'une fonction de H par une fonction de λ : la dispersion du phénomène de Kerr est indépendante du champ.

2° La biréfringence électrique est proportionnelle à une puissance du champ. L'exposant k de cette puissance peut se calculer par les relations

$$a^k = \frac{l}{l_1}, \qquad a = \frac{V_1}{V} \times \frac{d}{d_1};$$

---

[1] La forme de la fonction $f(H, \lambda)$ n'est déterminée par l'expérience précédente que pour les valeurs de H qui sont de la forme $a^n H_0$ et l'on pourrait ajouter au second membre de l'égalité précédente une fonction arbitraire, à condition qu'elle se reproduise périodiquement toutes les fois que le champ est multiplié par a. Cette hypothèse est inacceptable, car elle fait jouer un rôle particulier au nombre a qui est défini par les dimensions des condensateurs et n'a aucun rapport avec le phénomène étudié.

d'où

$$k = \frac{\log l_1 - \log l}{\log \frac{V}{V_1} + \log d_1 - \log d}.$$

3° L'erreur sur la détermination de cette fonction est la même que si l'on mesurait directement la biréfringence électrique avec une même incertitude ε, en utilisant un condensateur de longueur $l_1 - l$. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir être employée avec une source de lumière blanche, sans qu'il soit nécessaire de mesurer le retard introduit par chacun des condensateurs: de cette façon l'erreur ε peut être rendue très faible.

Pour obtenir l'exposant k, il suffit de connaître les dimensions géométriques des condensateurs et le rapport $\frac{V}{V_1} = \frac{R + R'}{R}$. Par suite du défaut d'uniformité du champ, au voisinage des extrémités des électrodes, on devra dans le calcul remplacer les longueurs l et l_1 par leurs valeurs corrigées l' et l'_1 (1).

Si l'on admet les valeurs

$$l' = 20^{cm},331, \qquad d = 0^{cm},39878,$$
$$l'_1 = 90^{cm},6, \qquad d_1 = 0^{cm},8375,$$
$$\frac{V}{V_1} = 1,0035 \ (^2),$$

(1) Les formules établies pour le calcul de la correction de longueur supposent l'exactitude de la loi de Kerr; mais comme, d'une part, le terme correctif est faible, et que, d'autre part, la loi de Kerr se trouvera vérifiée, il n'y a aucun inconvénient à admettre la valeur de la correction obtenue en partant de cette hypothèse.

(2) La valeur admise pour $\frac{V_1}{V}$ est la moyenne des résultats des expériences précédentes. En toute rigueur, on aurait dû remplir les deux condensateurs d'un même liquide; mais nous avons vu que les différences entre l'action des divers échantillons de sulfure sont négligeables. Nous verrons d'ailleurs que les mesures de la constante de Kerr donnent le même nombre à $\frac{1}{1000}$ près pour le sulfure de la cuve étalon et l'un des sulfures du grand condensateur.

on trouve

$$k = 2,0045.$$

Cette valeur n'est pas tout à fait égale à 2; l'écart n'est pas supérieur à la valeur que l'on pourrait calculer d'après les erreurs possibles des mesures géométriques. Pour trouver $k = 2$, il suffirait, par exemple, conservant les valeurs précédentes pour toutes les autres grandeurs, d'admettre pour distance des plateaux du grand condensateur $d_1 = 0^{cm},8389$. Ce nombre n'est supérieur que de 14^{μ} à la valeur adoptée; cet écart dépasse à peine la limite supérieure de l'erreur que nous avons admise (10^{μ}) et peut même s'expliquer par l'épaisseur de la couche de colle servant à fixer les plateaux aux cales de verre.

Nous sommes donc en droit de conclure à l'exactitude de la loi de Kerr.

C. — **Détermination des constantes absolues.**

J'ai déjà fait une étude complète de l'appareil qui m'a servi à l'analyse des vibrations elliptiques et des méthodes de mesures géométriques et électriques que j'ai employées; il ne me reste donc plus à décrire que l'ensemble du montage optique et de la méthode employée pour la mesure de la différence de marche introduite par la cuve. Je donnerai ensuite les résultats obtenus et je discuterai leur accord avec ceux déjà publiés ou prévus par les théories.

Dispositif optique. — La source de lumière est une lampe à mercure Cooper-Hewitt (brûleur Silica de 110 volts) dont j'ai utilisé soit les radiations jaunes, soit la radiation verte séparées spectralement.

Cette séparation est effectuée par une lentille L_2 et un prisme A qui donnent dans le plan D_2 des images monochromatiques de l'ouverture E sur laquelle la lentille L_1

forme une image du tube de la lampe (*fig.* 40). Le prisme A est un prisme de sulfure de carbone à faces de verre prismatiques; l'angle du prisme liquide est assez grand pour que les images monochromatiques jaune et verte D_2, dont le diamètre est 4^{mm}, soient à 15^{mm} l'une de l'autre.

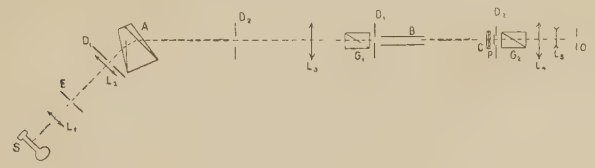

Fig. 40.

On pouvait amener successivement ces deux images à recouvrir une ouverture de $3^{mm},3$ percée dans l'écran D_2 par une rotation de l'ensemble des appareils SA; il était possible, d'autre part, de tourner le prisme A séparément pour les amener au minimum de déviation (1).

Une lentille L_3 donne de D_2 une image D'_2 recouvrant exactement le diaphragme du système de plages dont le diamètre est 1^{cm}; elle donne, d'autre part, d'un diaphragme D_1 placé près du prisme, une image recouvrant le second diaphragme D'_1 qui se trouve tout contre la cuve B et a un diamètre de 3^{mm}. Ce sont ces deux diaphragmes, distants de $1^{m},20$, qui limitent le faisceau incident et qui définissent le parallélisme. Il faut remarquer que D'_2 étant l'image de D_2, seule la lumière utilisée est admise dans la cuve.

Le polariseur est un prisme de Glazebrook G_1, l'analyseur est l'appareil général déjà décrit, composé du compensateur C, du système de plages P, du prisme de Glaze-

(1) Les images fournies par les deux raies jaunes ne sont pas exactement superposées; mais il était possible de recouvrir le diaphragme D_2 par la partie commune; les mesures faites avec cette couleur se rapportent donc à l'ensemble de ces deux radiations.

brook G_2; la lunette d'observation se compose des lentilles L_4 et L_5 et de l'œilleton O.

Réglage des appareils. Un premier réglage a pour effet de faire coïncider les axes de rotation des bonnettes du polariseur et de l'analyseur avec l'axe du faisceau lumineux; un second réglage oriente normalement à ce faisceau les faces des prismes polariseurs et des différentes lames cristallines. La cuve ayant été disposée de façon que le faisceau la traverse sans toucher les armatures, il ne reste plus qu'à orienter la section principale du polariseur à 45° du champ électrique. Il est facile de la régler parallèlement à ce champ à une ou deux minutes près en s'assurant que l'établissement de la différence de potentiel ne produit pas d'ellipticité appréciable; on le tourne ensuite de 45°. L'erreur provenant des défauts de ce réglage est du second ordre et ses effets sont certainement négligeables.

Observation du phénomène. — Bien qu'on connaisse les axes de la vibration elliptique produite, j'ai préféré mesurer son ellipticité au moyen de l'appareil général; l'observation de l'égalité d'éclairement des quatre plages deux à deux permet de s'assurer que la vibration, issue du compensateur, est toujours la même; l'aspect observé est le même après l'établissement du potentiel qu'en l'absence du champ; la sensibilité est la même, et de plus, on évite les erreurs qu'un système de deux plages peut introduire lorsque, par suite de l'inexactitude du quart d'onde, l'éclairement des plages croît avec l'ellipticité de la vibration étudiée.

L'identité de ces aspects pourrait n'être pas réalisée si l'établissement du champ produisait de la lumière parasite; elle réduirait la sensibilité, et si sa répartition n'était pas uniforme sur les plages, elle introduirait une erreur

sur la mesure de l'ellipticité. Après avoir supprimé les faisceaux réfléchis, je n'ai jamais observé de lumière parasite, sauf à de très rares instants. En examinant alors la cuve à l'aide d'une loupe qui permet de mettre au point sur son image située un peu en arrière de O, on constate l'existence de poussières. Elles apparaissent comme de petites taches brillantes se déplaçant rapidement entre les plateaux ou s'immobilisant brusquement en chapelets. En supprimant et rétablissant le champ plusieurs fois, ces poussières finissent par tomber au fond de la cuve.

D'ailleurs ces poussières, qui gênent les mesures, ne semblent pas avoir d'action sur la valeur de la constante : elles produisent un éclairement de toutes les plages, sans qu'on puisse percevoir de différence. La contradiction avec les résultats signalés par d'autres observateurs tient sans doute à ce que le courant transporté par ces poussières ne fait pas varier le champ électrique : la source étant capable de débiter à potentiel constant.

Température. — L'emploi d'un condensateur à plateaux verticaux a assuré l'uniformité de la température [1], et a permis sa mesure facile. Je l'ai prise directement entre les électrodes en y introduisant un thermomètre spécial, construit par M. Baudin, dont le réservoir n'avait que 3^{mm} de diamètre. Sa graduation en $\frac{1}{10}$ de degré était faite en parties d'égal volume; en le comparant au voisinage de 20° avec un thermomètre Tonnelot, étalonné

---

[1] Dans la grande cuve de 90^{cm} à plateaux horizontaux, il se produit des différences de température entre les différents niveaux, et la cuve peut se comporter comme un prisme qui dévie le faisceau lumineux. On observait d'ailleurs, en mettant au point sur l'intérieur de la cuve, des ombres semblables aux buées qui s'élèvent d'un sol surchauffé dans une atmosphère parfaitement calme. Leur déplacement lent montre que le liquide n'est soumis à aucun mouvement violent.

par le Bureau international des Poids et Mesures, je n'ai pas trouvé de différences supérieures à $\frac{3}{100}$ de degré. Je donnerai les températures dans l'échelle du thermomètre à mercure en verre dur.

Exécution d'une mesure. — La méthode employée est celle de Stokes (*Cf.* p. 112) qui n'exige pas la connaissance du retard introduit par le compensateur. Elle ne nécessite théoriquement pas la prise du zéro; j'ai fait pourtant des pointés en l'absence du champ pour éliminer l'effet de la trempe des glaces et faire la correction tenant à ce que le système de plages n'était pas exactement « équilibré ».

Chacune des deux positions principales a été déterminée par les quatre positions secondaires qui lui correspondent. Une mesure comprend donc 16 pointés : 8 avec champ et 8 sans champ; pour chacun d'eux, on se contente de la lecture d'un vernier sur le cercle extérieur et d'un vernier sur le cercle intérieur; l'emploi des quatre positions secondaires élimine les erreurs provenant des défauts de centrage des cercles.

Si, pour se rendre compte de la précision des mesures, on répète dix fois de suite le même pointé, on constate que les nombres lus sur le cercle intérieur (1) se répartissent dans un intervalle de 2′, c'est-à-dire ne s'écartent pas de plus de 1′ de la valeur moyenne (2).

---

(1) La précision avec laquelle l'égalité des plages correspondantes permet de fixer la position du cercle extérieur dépend de l'ellipticité de la vibration étudiée. Pour une vibration rectiligne, l'orientation du compensateur est aussi bien définie que celle du système de plages; pour une vibration circulaire, le compensateur doit être exactement quart d'onde, mais sa position est indifférente.

(2) Les résultats de la discussion de la sensibilité des analyseurs à pénombre permettent de calculer *a priori* l'ordre de grandeur de

Voici par exemple deux Tableaux donnant les résultats des mesures faites sur un même sulfure pour la raie verte et les raies jaunes. Le compensateur était le même; il est sensiblement quart d'onde pour les raies jaunes. Les températures t_1 et t_2 sont celles qui ont été mesurées avant et après les observations optiques.

---

la précision qu'on doit obtenir par les formules

$$\delta = 2\sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon_0 k_0 . k_1}}\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}}, \qquad \mathrm{AH} = \frac{\delta}{8}\frac{\Delta\eta}{\eta}.$$

La lampe à mercure en quartz fonctionnait sous un régime de 3 ampères avec 60 volts aux bornes; le tube avait 5^{cm} à 6^{cm} de longueur. Les deux radiations verte et jaune avaient à peu près le même éclat, sa valeur était environ 40 b.cm pour chacune d'elles dans la direction perpendiculaire à l'axe du tube qui était utilisée pour les mesures.

On pourrait augmenter l'éclat en employant une lampe à mercure observée suivant l'axe de la colonne lumineuse et fonctionnant sous un voltage plus élevé; il faudra alors prendre garde à l'accroissement de l'éclat du fond continu du spectre et des raies faibles voisines et s'assurer qu'il ne fait pas varier la position du centre de gravité optique des radiations utilisées.

L'absorption par tous les appareils qui précèdent l'analyseur réduit l'éclat à la valeur $\varepsilon_0 = 6{,}6$. Le coefficient k_0 qui représente l'absorption de l'analyseur et de la lunette est 0,42, donc $k_0\varepsilon_0 = 2{,}8$. k_1 est voisin de l'unité, le cercle oculaire a un diamètre de $1^{mm}{,}5$, tandis que la pupille normale a un diamètre de 6^{mm}. $\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} = 4$. En prenant les valeurs $\eta = 0{,}5.10^{-4}$, $\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{1}{30}$ auxquelles nous a conduit la discussion des expériences de Broca, on trouve une valeur de l'angle des plages δ voisine de 2° et la demi-largeur du ruban est AH = tang 30″. L'expérience a montré que la valeur optima de l'angle des plages est voisine de 2°; mais, par suite de la visibilité de la ligne de séparation et de la lumière diffusée par les appareils et dépolarisée par les glaces, la précision des pointés est un peu inférieure à la valeur calculée.

TABLEAU I.

$\lambda = 546$ $t_1 = 16°41$ $t_2 = 16°47$
$R = 11\,000\,200^{\omega}$ $r = 1\,000^{\omega}$ Pile n° 1

Cercle intérieur.			Cercle extérieur.		
Sans champ.	Avec champ.	Rotations.	Sans champ.	Avec champ.	Rotations.
191°.19′.50″	203°. 1′.20″	+11°.41′.30″	279°.15′.50″	280°.21′. 0″	+1°.5′.10″
11.19. 0	23. 0.10	+11.41.10	279.19.20	280.23.50	+1.4.30
11.19.20	23. 2.50	+11.43.30	99.19.20	100.23.20	+1.4. 0
191.20.40	203. 0.20	+11.39.40	99.16. 0	100.20.40	+1.4.40
281.10.20	269.24.30	−11.45.50	189.31.40	188.26. 0	−1.5.40
101.10.50	89.24.10	−11.46.40	189.31.10	188.22.40	−1.8.30
101.10.50	89.25. 0	−11.45.40	9.32. 0	8.24.40	−1.7.20
281.11.30	269.24.10	−11.47.20	9.31. 0	8.27.30	−1.3.30

TABLEAU II.

$\lambda = 578$ $t_1 = 17°72$ $t_2 = 17°84$
$R = 11\,000\,200^{\omega}$ $r = 1\,010^{\omega}$ Pile n° 1

Cercle intérieur.			Cercle extérieur.		
Sans champ.	Avec champ.	Rotations.	Sans champ.	Avec champ.	Rotations.
281°.10′.30″	270°.38′. 0″	−10°.32′.30″	189°.31′.10″	189°.33′.10″	+ 2′. 0″
101.10.30	90.37. 0	−10.33.30	189.32. 0	189.30. 0	− 2. 0
101.10.30	90.37.30	−10.33. 0	9.32.30	9.33.10	+ 0.40
281.10.20	270.35.20	−10.35. 0	9.32.30	9.33.30	+ 1. 0
191.19.40	201.48.30	+10.28.50	99.13. 0	99.13.50	+ 0.50
11.18.40	21.48.30	+10.29.50	99.17.50	99.17.30	− 0.20
11.17.40	21.49.10	+10.31.30	279.16.40	279.16.50	+ 0.10
191.19.50	201.48.10	+10.28.20	279.14.20	279.13. 0	− 1.20

L'examen de ces Tableaux montre que les écarts de lectures correspondant aux quatre positions secondaires d'une même position principale peuvent atteindre 3 minutes; cette différence doit être attribuée en grande partie à l'incertitude des pointés; cette erreur étant accidentelle, elle s'éliminera quand on prendra la moyenne

de toutes les lectures; dans ces écarts, se retrouvent les erreurs provenant des défauts de graduation et de centrage des cercles.

Lorsque le champ n'existe pas, les positions principales devraient être à angle droit; les écarts qui apparaissent à l'examen des tableaux sont ici plus importants : ils sont d'environ 10′ pour le cercle intérieur et 14′ pour le cercle extérieur [1]. Il résulte de ce que le compensateur est approximativement quart d'onde, que le premier de ces écarts est produit par l'ellipticité de la vibration qui sort de la cuve; elle est due à la trempe des glaces et est de 5′. Le second provient de ce que le système de plages n'est pas parfaitement équilibré; l'ellipticité de la vibration qu'il définit est d'environ 7′.

La détermination du zéro a précisément pour but de tenir compte de ces ellipticités. Comme elles sont très faibles, on peut, au lieu d'employer les formules générales données à la page 114, calculer la biréfringence produite par le champ par la formule

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\nu}{\cos 2\mu},$$

où ν et μ sont les moyennes des rotations des cercles intérieur et extérieur, lorsqu'on passe du pointé sans champ au pointé avec champ.

On obtient dans les deux expériences précédentes :

I. $2\nu = 23^\circ 28' 12''$, $2\mu = 2^\circ 10' 50''$, $2\beta = 23^\circ 22' 20''$.

II. $2\nu = 21^\circ\ 3'\ 7''$, $2\mu = 0$ $2\beta = 21^\circ\ 3'\ 7''$.

La valeur admise pour 2ν peut être considérée comme exacte certainement à 2′ près et vraisemblablement

[1] L'égalité des plages n'a pas été réalisée, et la lecture du vernier n'a pas été faite avec le même soin pour le cercle extérieur que pour le cercle intérieur; les nombres qu'il fournit n'interviennent en effet que dans un terme correctif qui est toujours resté faible.

à 1′ près. L'erreur sur μ n'intervient pas dans le calcul de l'ellipticité et l'erreur sur β est la même que sur ν. *L'erreur qui en résulte sur la constante de Kerr est de l'ordre de* $\frac{1}{1000}$.

Calcul de la constante. — La constante de Kerr est définie par la relation

$$\frac{\delta}{\lambda} = B\frac{V_0^2}{d^2}l';$$

elle servira à calculer B connaissant

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\beta}{2\pi}, \quad V_0 = \frac{R+r}{r}E, \quad l' \text{ et } d:$$

on trouve ainsi pour les deux expériences précédentes

$$B_V = 3,6409\ 10^{-7}, \qquad t = 16^\circ 44,$$
$$B_J = 3,3460\ 10^{-7}, \qquad t = 17^\circ 78.$$

Pour comparer entre elles les valeurs obtenues dans différentes expériences, je les ai ramenées à la température de 20° en utilisant la loi de variation avec la température donnée par Leiser (*loc. cit.*). Du Tableau donné par cet auteur, on peut déduire la Table suivante qui a servi pour mes calculs.

t.	$\log\frac{B_t}{B_{20}}$.	t.	$\log\frac{B_t}{B_{20}}$.
15°	0,01094	19°	0,00204
16	0,00860	20	0
17	0,00634	21	—0,00196
18	0,00415	22	—0,00384

A 20°, la variation de la constante par degré est $\frac{46}{1000} = \frac{1}{217}$.

Les résultats de mes expériences sont résumés par le Tableau suivant :

Date.	λ.	t.	$B_t.10^7$.	$B_{20}.10^7$.
15 août 1913.....	546	17°.98	3,6152	3,5805
16 août 1913.....	546	16,73	3,6360	3,5783
17 août 1913.....	546	16.44	3,6409	3,5778
16 août 1913.....	578	17.31	3,3531	3,3096
16 août 1913.....	578	17.78	3,3460	3,3105
26 février 1914....	578	18·36	3,3334	3,3075
26 février 1914....	578	18.54	3,3305	3,3076

Les expériences d'août sont relatives à un sulfure provenant de la maison Kahlbaum et purifié avec soin au laboratoire; celles de février ont été faites avec du sulfure ordinaire distillé une fois seulement.

Les valeurs de B_{20} ne diffèrent pas de plus de $\frac{1}{1000}$. Il semble même que les écarts soient dus à une très petite inexactitude de la loi de variation avec la température que nous avons adoptée. Si l'on suppose qu'à la température des expériences voisine de 17°, la constante de Kerr est une fonction linéaire de la température, on trouve que le coefficient de variation est de $\frac{46}{1000}$ par degré et tous les nombres rapportés à 17° sont concordants à $\frac{1}{10000}$ avec les valeurs suivantes :

$$\text{Sulfure de Kahlbaum.....} \begin{cases} B_V = 3,6315 \\ B_J = 3,3580 \end{cases} \quad t = 17^\circ.$$

$$\text{Sulfure ordinaire .....} \quad B_J = 3,3543$$

La discussion de la précision des mesures ne permet pas de compter sur une telle approximation qui est sans doute due au hasard; *mais les nombres précédents sont certainement exacts à* $\frac{1}{500}$ *près et vraisemblablement à* $\frac{1}{1000}$.

Les valeurs obtenues pour les radiations verte et jaune de l'arc à mercure vérifient bien la formule de Havelock qui permet alors de calculer la valeur de la constante pour les raies jaunes du sodium.

On trouve

$$\frac{B\lambda n}{(n^2-1)^2} = 1,135.10^{-11},$$

et

$$B_D = 3,226.10^{-7} \text{ à } 20^\circ.$$

Ce nombre est en accord avec les résultats des autres expérimentateurs, bien qu'un peu plus élevé que la moyenne des déterminations antérieures.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

L'étude historique des travaux sur le phénomène de Kerr a montré une divergence assez grande entre les résultats obtenus par les différents expérimentateurs. Pour donner une base solide aux études qui restent encore à entreprendre sur ce phénomène, il était utile de rechercher jusqu'à quel point il était bien défini et de voir si l'on pouvait le soumettre à des mesures de précision.

J'ai choisi le sulfure de carbone pour ces recherches; c'est le corps qui a été le plus étudié et beaucoup d'expérimentateurs semblent penser que des modifications très faibles des conditions expérimentales peuvent suffire à changer notablement les résultats.

Mes premiers essais m'ont montré que les principales difficultés des mesures précises provenaient de l'imperfection des méthodes optiques et de l'insuffisance des méthodes électrostatiques.

L'application d'un mode de représentation des vibrations elliptiques proposé par Poincaré m'a permis de faire une étude générale des appareils destinés à leur analyse. J'ai mis en évidence le double rôle joué par un analyseur elliptique : définir une vibration par un « système de plages », l'amener à coïncider avec celle qu'on étudie par un « système compensateur »; j'ai donné les conditions auxquelles doit satisfaire l'analyseur pour rem-

plir avec le plus de sensibilité et de commodité ce double rôle. J'ai montré qu'une importante cause d'erreur pouvait provenir des effets de la lumière réfléchie sur les faces des lames cristallines, et j'ai donné le moyen de s'en affranchir. J'ai indiqué également les conditions géométriques à imposer au faisceau lumineux pour utiliser le mieux possible la sensibilité de l'œil. Par l'application de ces résultats, j'ai réalisé un appareil général d'étude des vibrations elliptiques qui permet de déterminer les éléments d'une vibration quelconque; il donne sa position sur la sphère de Poincaré avec une précision qui est la même pour toutes les vibrations et qui peut atteindre celle des meilleurs appareils polarimétriques.

La difficulté des mesures électriques est de réaliser un champ exactement connu sur tout le trajet du faisceau lumineux. Par l'emploi de la représentation conforme, j'ai pu calculer le champ en chaque point de l'espace en fonction des éléments géométriques du condensateur et de la différence de potentiel établie entre ses armatures : j'ai donné une formule générale qui permet de calculer l'action sur la lumière polarisée d'un condensateur plan à plateaux épais, en tenant compte, par une correction de longueur, des variations du champ au voisinage des extrémités. J'ai fait construire un tel condensateur, dont les éléments géométriques sont bien définis par suite du soin apporté à l'exécution des surfaces et ont été mesurés par les méthodes les plus correctes. La mesure du potentiel en unités électromagnétiques a pu être faite par une méthode potentiométrique de précision, grâce à l'emploi d'une batterie de 5000 accumulateurs et d'une série de résistances de 10 mégohms que j'ai construites à cet effet.

J'ai d'abord comparé entre eux des sulfures de provenances diverses par la méthode des condensateurs croisés, la compensation étant obtenue par la variation du rapport

des potentiels : j'ai ainsi vérifié que la biréfringence électrique du sulfure de carbone est une propriété aussi bien définie que les autres constantes physiques de ce corps. Les mêmes expériences m'ont montré l'exactitude de la loi de Kerr.

Il est donc légitime de chercher à déterminer la valeur de la constante de Kerr du sulfure de carbone avec toute la précision que permettent d'obtenir les méthodes de mesures optiques, géométriques et électriques. J'ai trouvé à 17° pour les deux radiations verte et jaune du mercure

$$B_V = 3,6315$$
$$B_J = 3.3580$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{500}$.

J'ai montré que ces valeurs vérifient la formule de Havelock; l'application de cette formule permet d'en déduire la valeur de la constante pour la radiation jaune du sodium et la température de 20°.

$$B_D = 3,226.$$

Vu et approuvé :
Paris, le 19 mai 1914.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 19 mai 1914.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

HISTORIQUE 1
Première période 1834-1874 2
Deuxième période 1875-1883 3
Troisième période 1884-1904 12
Quatrième période 1905-1913 22
Conclusions et Introduction 36

PREMIÈRE PARTIE.

Étude d'un faisceau lumineux polarisé elliptiquement.

CHAPITRE I 43
A. Représentation géométrique des vibrations elliptiques 43
B. Position du problème. Sa décomposition en deux parties distinctes 51

CHAPITRE II 57
A. Définition du faisceau incident et conditions de l'observation 57
B. Différents systèmes de plages 66
C. Rôle du système compensateur 81

CHAPITRE III 86
A. Détermination de l'azimut d'une vibration rectiligne 87
B. Mesure de l'ellipticité d'une vibration d'axes connus 91
C. Détermination des éléments d'une vibration elliptique quelconque 105
D. Réalisation d'un analyseur elliptique 112

CHAPITRE IV. *Rôle de la lumière réfléchie sur les lames cristallines* 120
A. Théorie et formules générales 122
B. Application aux analyseurs 133
C. Construction d'un compensateur de mica 143

DEUXIÈME PARTIE.

Pages.

CHAPITRE I. *Étude du champ d'un condensateur plan*..... 147
A. Problème de Dirichlet. Correction de longueur..... 147
B. Le Condensateur. Mesures géométriques..... 168
C. Le Potentiel. Mesures électriques..... 179

CHAPITRE II. — *Étude de la biréfringence électrique du sulfure de carbone*..... 188
A. Influence des impuretés..... 188
B. Vérification de la loi de Kerr..... 194
C. Détermination des constantes absolues..... 198

Résumé et Conclusions..... 208

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Poids atomique de l'azote.

Vu et approuvé :
Paris, le 19 mai 1914.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 19 mai 1914.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

54778 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
51778 Quai des Grands-Augustins, 55